GRANDI TASCABILI ECONOMICI

Un modo nuovo di intendere i tascabili. Volumi eleganti, curati nel contenuto e nella veste tipografica, di grande formato ma al prezzo più economico. Una collana per offrire al pubblico più vasto i grandi libri che non tramontano.

Bertrand Russell
I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

Alla verità sperimentale della geometria, non più, dopo il XIX secolo, "fortezza inespugnabile degli idealisti", regno della pura astrazione, si richiama questo saggio di Russell, tanto più attuale se si pensa che le intuizioni del filosofo inglese anticipavano inconsapevolmente una scoperta degli anni a venire, e cioè che uno spazio soggetto alle leggi della relatività generale è necessariamente non-euclideo. Russell dimostra infatti in queste pagine «l'impossibilità logica, se questo tipo di conoscenza deve essere liberata dalle contraddizioni, di astrarre completamente la geometria da ogni riferimento alla materia contenuta nella forma».

Bertrand Russell nacque a Trelleck, nel Galles, nel 1872. Considerato uno dei massimi filosofi e matematici del nostro tempo, si distinse per il suo impegno sociale e politico che gli causò aperti contrasti con le autorità. Nel 1950 ricevette il premio Nobel per la letteratura. Morì nel 1970. Di Russell la Newton & Compton ha già pubblicato: *Introduzione alla filosofia matematica*, *I principi della matematica*, *Matrimonio, sesso e morale*, *L'analisi della mente*, *Dio e la religione*, *La mia filosofia*, *Teoria della conoscenza* e *Il mio pensiero*.

41GTE 436

ISBN 88-8183-736-2

Lire 5900

Distribuzione A. Pieroni - Milano

NEWTON SAGGI
Lire 5900 Lire

RUSSELL

I fondamenti della geometria

Un testo che rivoluziona l'idea tradizionale di "geometria", riconducendola a metodo di lettura della realtà inseparabile dai dati dell'esperienza

Traduzione di Ada Bonfirraro
Edizione integrale

GRANDI TASCABILI ECONOMICI

Per l'immagine di copertina © SIS/B. Starosta (particolare)

Titolo originale: *An essay on the foundations of geometry*
Traduzione di Ada Bonfirraro

Prima edizione: giugno 1975
Ristampa identica alla prima edizione: giugno 1997
© 1975 Newton Compton editori s.r.l.
Roma, Casella postale 6214

ISBN 88-8183-738-2

Bertrand Russell

I fondamenti della geometria

Edizione integrale

Grandi Tascabili Economici
Newton

Grandi Tascabili Economici, sezione dei Paperbacks
Pubblicazione settimanale, 25 giugno 1997
Direttore responsabile: G.A. Cibotto
Registrazione del Tribunale di Roma n. 16024 del 27 agosto 1975
Stampato per conto della Newton & Compton editori s.r.l., Roma
presso l'Istituto Grafico Silvio Basile s.r.l., Genova
Distribuzione nazionale per le edicole: A. Pieroni s.r.l.
Viale Vittorio Veneto 28 - 20124 Milano - telefono 02-29000221
telex 332379 PIERON I - telefax 02-6597865
Consulenza diffusionale: Eagle Press s.r.l., Roma

NOTA BIOBIBLIOGRAFICA

Bertrand Russell nasce il 18 maggio 1872 quale secondo ed ultimo figlio del Visconte di Amberley. Perde la madre, e successivamente il padre, nel volgere dei suoi primi tre anni e mezzo e viene preso in casa dai nonni paterni, Lord e Lady John Russell, ambedue liberali per tradizione, lui già primo ministro ed esperto di politica internazionale (è noto il suo atteggiamento favorevole al Risorgimento italiano), lei nettamente favorevole all'indipendenza irlandese ed in senso più vasto anti-imperialista. I suoi studi secondari sono prevalentemente privati; entra poi al Trinity College di Cambridge, dove la sua formazione va completandosi e definendosi a contatto dell'insegnamento di uomini quali Whitehead e McTaggard, come pure di amicizie significative, G. E. Moore soprattutto, ed ancora Lytton Strachey, G. Trevelyan.

A ventidue anni, completato il suo curriculum scolastico, passa all'ambasciata di Parigi; l'anno appresso si sposa, decidendo del pari di spostarsi, attratto dai problemi sociali, verso le terre fulcro del Socialismo. Va in Germania, a Berlino. Ne ricava un'opera sulla *Socialdemocrazia tedesca*, che data appunto di quell'anno, 1896.

Dopo un viaggio in America, si applica a terminare *I fondamenti della geometria*, e nel 1900, anno della pubblicazione della sua *Esposizione critica della filosofia di Leibnitz*, partecipa al Congresso di Parigi stabilendo i primi rapporti con la scuola di Peano. Intanto è tutt'altro che alieno dalla politica militante, anche se nel 1907 deve, come deputato liberale, subire una sconfitta elettorale. Nel 1910 esce il primo volume dei *Principia Mathematica*; Russell torna a Cambridge come lettore di logica. Dopo una nuova parentesi americana, costituita da un corso all'Università di Harvard, dove ha T. S. Eliot fra i suoi ascoltatori, all'inizio della guerra le sue idee dichiaratamente pacifiste gli costano l'allontanamento dall'insegnamento e la rottura del contratto con il Trinity College. Dopo il secondo ed il terzo volume dei *Principia*, del '12 e del '13, proprio nel '16 egli aveva infatti dato alle stampe i *Principi di riforma sociale*. Ed è a causa d'un articolo pacifista che deve scontare quei sei mesi di carcere nel 1918, durante i quali scrive l'*Introduzione alla filosofia matematica*.

Nel 1920 esce ancora *Teoria e pratica del bolscevismo*, frutto d'un suo viaggio in Russia ed in Cina. Russell è uno dei primi occidentali invitato ufficialmente da una Università Cinese, quella di Pechino, a tenere delle conferenze. La sua figura e la sua filosofia, così come furono in quell'occasione presentate, costituirono un'occasione ed un mezzo di apertura della cultura cinese del '900 alle problematiche occidentali. Anche quest'esperienza non resta senza un documento scritto: *Il pro-*

blema della Cina. Si batte ancora in quegli anni come candidato laburista, ma è sconfitto altre due volte. Con la sua caratteristica serietà sperimentale cerca in questo periodo di verificare alcune sue idee pedagogiche, aprendo con la moglie, la seconda, una scuola per bambini (*Sull'educazione specialmente dei bambini piccoli*, 1926). Seguono altre opere: *Analisi della materia* e *La filosofia* (1927), *Saggi scettici* (1928), *Matrimonio e morale* (1929), *La conquista della felicità* (1930), *L'educazione e l'ordine sociale* (1932), *Libertà ed organizzazione* (1934), *Elogio dell'ozio* (1935) ed *Il potere* (1938).

Dal 1938 al 1944 Russell trova l'opportunità di insegnare in diverse Università inglesi e americane, qualche volta con improvvise e drammatiche rescissioni del contratto di assunzione, come nel caso del « College of The City » di New York, dove fu accusato di immoralità. Anche in quel caso il contratto fu rescisso improvvisamente. Nel 1944 è l'Università di Cambridge, di nuovo, ad invitarlo.

Risalgono a questo periodo una ricerca *Sul significato e sulla verità* (1940) e la *Storia della filosofia occidentale* (1945). Nel 1948, l'anno in cui è data alle stampe la sua *Conoscenza umana*, a 76 anni di età, si salva a nuoto da un incidente aereo. Nel '50, data di pubblicazione dei *Saggi impopolari*, gli vien conferito il Premio Nobel.

Russell si impegna sempre più nella sua attività politica militante, e continua ad essere l'animatore, con i suoi interventi in Trafalgar Square, di grandi correnti di opinione intorno alle questioni politiche internazionali di maggiore momento, come la guerra atomica (*Senso comune e guerra atomica*, 1959), lanciando nel '62 un appello a Kennedy ed a Krusciov per una pacifica soluzione della crisi di Cuba. In riferimento alla situazione del Vietnam motivò pubblicamente la propria uscita dal Partito Laburista. Proseguendo questi suoi scopi creò, novantenne, la Fondazione per la Pace, e dette il suo nome a quel tribunale che, riunito in Svezia e poi in Danimarca, per primo riconobbe gli Stati Uniti colpevoli di genocidio. Dopo la pubblicazione de *Il mio sviluppo filosofico*, qualche anno fa ha destato grande interesse l'annuncio in Gran Bretagna della pubblicazione delle sue memorie, in volumi successivi: opera che non ha tardato a riscuotere anche nella versione italiana quel successo di pubblico che ha crescentemente accompagnato ogni opera di Russell.

Muore a Penthryfrndraeth, nel Galles settentrionale, il 2 febbraio 1970, per i postumi d'una grave forma influenzale. « A coloro che rimanevano – aveva scritto nel suo *Necrologio* ufficiale 33 anni ptima – egli appariva, anche nell'estrema vecchiezza, come un uomo contento e soddisfatto, e ciò senza dubbio era dovuto in larga misura alla sua eccellente salute, giacché politicamente, durante i suoi ultimi anni, egli non era meno isolato di Milton dopo la Restaurazione. Fu ultimo sopravvissuto di un'epoca ormai morta ».

I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

PREFAZIONE

Quest'opera è basata sulla dissertazione presentata all'esame di ammissione quale membro del Trinity College a Cambridge nell'anno 1895. La sezione B del terzo capitolo è in gran parte una ristampa, con alcune importanti modifiche, di un articolo apparso su « Mind » (Nuova Serie, n. 17). La materia del libro è stata trattata sotto forma di conferenze all'Università John Hopkins di Baltimora ed al Bryn Mawr College della Pennsylvania.

La mia gratitudine va principalmente al Professor Klein. Nella stesura del primo capitolo le sue « Conferenze sulla geometria non euclidea » sono state per me una inestimabile guida; ho tratto da lui la suddivisione della metageometria in tre periodi, ed ho trovato il mio lavoro storico molto facilitato dai suoi riferimenti agli autori precedenti. Nella logica ho appreso molto da Mr. Bradley, e dopo di lui da Sigwart e dal Dr. Bosanquet. Su molti punti importanti, ho tratto utili suggerimenti dai *Principî di Psicologia* del Professor James. Debbo i miei ringraziamenti a Mr. G. F. Stout e a Mr. A. N. Whitehead che hanno cortesemente letto le bozze, e mi hanno aiutato con molte osservazioni utili. A Mr. Whitehead debbo pure il validissimo apporto della sua critica e dei suggerimenti continui durante tutta la fase di costruzione, specialmente per quanto riguarda l'importanza filosofica della geometria proiettiva.

Haslemere, maggio 1897.

INTRODUZIONE

DEFINIZIONE DEL PROBLEMA IN RELAZIONE ALLA LOGICA, ALLA PSICOLOGIA E ALLA MATEMATICA.

1. Durante i secoli diciassettesimo e diciottesimo, nella guerra contro l'empirismo, la geometria rimase la fortezza inespugnabile degli idealisti. Quanti sostenevano — posizione in genere diffusa sul Continente — fosse possibile una qualche conoscenza del mondo reale indipendente dall'esperienza, non dovevano far altro che indicare la geometria: nessuno, se non un pazzo, dicevano, ne avrebbe messo in dubbio la validità, e nessuno se non uno sciocco ne avrebbe negato il riferimento oggettivo. Gli Empiristi inglesi, in questa faccenda, avevano quindi un compito piuttosto difficile; dovevano o ignorare il problema, o se, come Hume e Mill, si avventuravano all'assalto, venivano indotti ad affermare il paradosso apparente che la geometria, in fondo, non aveva nessuna certezza di *tipo* diverso dalla meccanica — soltanto la presenza continua delle impressioni spaziali, sostenevano, rende la nostra esperienza della verità degli assiomi tanto estesa da *sembrare* certezza assoluta.

Tuttavia qui, come in molti altri casi, la logica impietosa portò questi filosofi, che lo volessero o no, in evidente contrasto col senso comune della loro epoca. Fu soltanto con Kant, il creatore della moderna epistemologia, che il problema geometrico ricevette una forma moderna. Egli ridusse la questione ai seguenti enunciati ipotetici: se la geometria ha una certezza apodittica, la sua materia, cioè lo spazio, deve essere *a priori*, e come tale sarà puramente soggettivo; e viceversa, se lo spazio è puramente soggettivo, la geometria deve avere una certezza apodittica. Il secondo enunciato ha più importanza per Kant, e in effetti è indissolubilmente legato a tutta la sua epistemologia; tuttavia ritengo che abbia molto meno forza

del primo. Accettiamo comunque per il momento la formulazione kantiana, e cerchiamo di attribuire un significato ai termini *a priori* e *soggettivo*.

2. Una delle grandi difficoltà in tutta questa controversia, è l'uso estremamente vario in cui queste parole, come la parola *empirico* vengono impiegate da autori diversi. Per Kant, che non era senz'altro uno psicologo, *a priori* e *soggettivo* erano termini quasi interscambievoli; [1] nell'uso moderno c'è in generale una tendenza a limitare la parola *soggettivo* alla psicologia, lasciando *a priori* al servizio della epistemologia. Se accettiamo questa differenziazione, possiamo stabilire, in corrispondenza ai problemi di quelle due scienze, le seguenti definizioni provvisorie: *a priori* si applica a tutte quelle nozioni che, anche se forse provocate dall'esperienza, sono *logicamente* presupposte nell'esperienza; *soggettivo* vale per tutti gli stati mentali la cui causa immediata si trova, non nel mondo esterno, ma entro i limiti del soggetto. Quest'ultima definizione naturalmente è adatta esclusivamente alla psicologia: dal punto di vista della scienza fisica tutte le condizioni mentali sono soggettive. Ma per una scienza la cui materia, strettamente parlando, è *soltanto* la condizione mentale, abbiamo bisogno, se dobbiamo usare questa parola per qualche scopo, di una differenziazione tra le condizioni mentali, per distinguere la più speciale soggettività di quelle cui viene applicato questo termine.

Ora, le uniche condizioni mentali la cui causa immediata si trova nel mondo esterno, sono le *sensazioni*. Una percezione dei sensi pura, è naturalmente una astrazione impossibile – non siamo mai interamente passivi sotto l'azione di uno stimolo esterno – ma ai fini della psicologia l'astrazione è utile. Quindi in psicologia, chiameremo soggettivo tutto ciò che non è percezione. È soltanto con la percezione dei sensi, che veniamo influenzati direttamente dal mondo esterno, ed è solo così che ci fornisce informazione diretta di se stesso.

3. Consideriamo adesso la questione epistemologica, circa il tipo di conoscenza che si può definire aprioristico. Qui non abbiamo niente a che fare – per lo meno in primo luogo – con la causa o la genesi di una nozione; accettiamo la conoscenza come un dato da analizzare e classificare. Questa analisi

[1] V. Erdmann, *Axiome der Geometrie*, p. III: « Für Kant sind Apriorität und ausschliessliche Subjectivität allerdings Wechselbegriffe ».

rivelerà un elemento materiale ed uno formale nella conoscenza. L'elemento formale consisterà di postulati che sono necessari perché la conoscenza sia resa possibile, e di tutto ciò che può dedursi da quei postulati; l'elemento materiale, d'altra parte, consisterà di tutto ciò che viene a inquadrarsi nel modello fornito dai postulati formali – tutto ciò che è contingente o dipendente dall'esperienza, tutto ciò che avrebbe potuto essere diverso senza rendere impossibile la conoscenza. Quindi chiamaremo l'elemento formale *a priori*, e l'elemento materiale empirico.

4. Ora, qual è la relazione tra soggettivo e *a priori*? Naturalmente si tratta di una relazione – se esiste – estrinseca, cioè non deducibile direttamente dalla natura dell'uno o dell'altro, ma dimostrabile – se può venir dimostrato – soltanto dopo un esame generale dei presupposti di entrambi. La questione di quale conoscenza sia aprioristica, secondo la definizione di cui sopra, dovrà dipendere dall'analisi logica della conoscenza, con la quale potranno rivelarsi le condizioni dell'esperienza possibile; ma la questione di quali elementi dello stato di conoscenza siano soggettivi deve venire esaminata dalla psicologia pura, che dovrà decidere cosa, nelle nostre percezioni, appartiene alla sensazione, e cosa è opera del pensiero o dell'associazione. Perciò, dato che questi due interrogativi appartengono a scienze diverse, e possono venire soddisfatti indipendentemente, non sarà meglio condurre le due ricerche separatamente? Sembra pericoloso decretare che l'*a priori* sarà sempre soggettivo, quando riflettiamo che questo punto di vista pone i nostri risultati quanto all'*a priori*, alla mercé della psicologia empirica. Quanto sia grave questo pericolo, lo dimostra a sufficienza la controversia sull'intuizone pura di Kant.

5. Perciò in tutto il presente Saggio, userò la parola *a priori* senza nessuna implicazione psicologica. Il mio esame dell'apriorità sarà puramente logico: Sarebbe impossibile l'esperienza se un dato assioma o postulato venisse negato? O, in un senso più ristretto, che indica l'apriorità limitatamente a una scienza particolare: Sarebbe impossibile l'esperienza circa l'argomento di quella scienza senza un dato assioma o postulato? Quindi anche i miei risultati saranno puramente logici. Se la psicologia afferma che alcune cose, che io ho definite *a priori*, non sono soggettive, allora, se non c'è errore in qualche particolare delle mie dimostrazioni, si dovrà rinunziare alla relazio-

ne tra l'*a priori* e il soggettivo per quanto riguarda quelle cose. Conseguentemente in questo Saggio non ci sarà nessuna discussione circa la relazione tra l'*a priori* e il soggettivo – una relazione che non può determinare quali nozioni siano aprioristiche, ma dipende piuttosto da tale determinazione ed appartiene comunque più alla metafisica che all'epistemologia.

6. Poiché mi sono azzardato ad usare la parola *a priori* in un senso leggermente anticonvenzionale, fornirò alcune osservazioni esplicative di natura generale.

L'*a priori*, da Kant in poi comunque, ha indicato generalmente l'elemento necessario o apodittico nella conoscenza. Ma la logica moderna ha dimostrato che le proposizioni necessarie sono sempre ipotetiche, almeno sotto un aspetto. Può sussistere, e di solito sussiste, l'implicazione che la relazione di cui si predica la necessità esista in qualche modo, tuttavia la necessità comporta sempre in sé il *fondamento* della necessità ed afferma questo fondamento piuttosto che la vera relazione. Come ci fa notare Bradley, « l'arsenico avvelena » rimane una verità anche se non sta avvelenando nessuno. Perciò se l'*a priori* nella conoscenza è principalmente ciò che è necessario, deve essere necessario in base a qualche ipotesi, e il *fondamento* della necessità deve essere incluso come *a priori*. Ma il fondamento della necessità, per quanto può dimostrarlo la relazione necessaria in questione, è un semplice fatto, un semplice giudizio categorico. Quindi, la necessità da sola non è un criterio di apriorità sufficiente.

Per integrare questo criterio, dobbiamo fornire l'ipotesi o fondamento per il quale soltanto vale la necessità, e tale fondamento varierà da una scienza all'altra e perfino, col progresso della conoscenza, nella stessa scienza in periodi diversi. Perché quando la conoscenza diventa più sviluppata e articolata, vengono percepite relazioni necessarie in numero sempre maggiore, e le verità puramente categoriche, anche se rimangono il fondamento del giudizio apodittico, diminuiscono nel numero relativo. Ciononostante, in una scienza discretamente progredita come la geometria, ritengo che possiamo fornire quasi completamente l'opportuno fondamento, e stabilire entro i limiti della scienza in sé, la distinzione tra quanto è necessario e quanto è semplicemente dogmatico.

7. Penso che vi siano due fondamenti in base ai quali si può cercare la necessità nell'ambito di qualsiasi scienza. Essi

possono essere (molto approssimativamente) distinti nel fondamento che Kant persegue nei *Prolegomena*, e in quello che persegue nella *Ragion pura*. Possiamo partire dall'esistenza della nostra scienza come un fatto, ed analizzare il ragionamento impiegato con il fine di scoprire il postulato fondamentale dal quale dipende la sua possibilità logica; in questo caso il postulato e tutto ciò che da esso solo deriva, sarà *a priori*. *Oppure* possiamo accettare l'esistenza della materia della nostra scienza come la nostra base di fatto, e dedurre dogmaticamente tutti i principî che possiamo dalla natura essenziale di tale materia. Nel secondo caso, tuttavia, non è l'intera natura empirica della materia, come viene rivelata dalle successive ricerche della scienza, a formare il nostro fondamento; perché se così fosse, sarebbe naturalmente *a priori* l'intera scienza. È piuttosto quell'elemento, nella materia, che rende *possibile* il ramo d'esperienza che tratta la scienza in questione.[2] L'importanza di questa distinzione apparirà più chiaramente quando andremo avanti.[3]

8. Questi due fondamenti di necessità, in ultima analisi, ricadono insieme. I *metodi* di ricerca nei due casi differiscono grandemente, ma i *risultati* non possono essere diversi. Perché nel primo caso, analizzando la scienza, scopriamo il postulato sul quale soltanto sono possibili i suoi ragionamenti. Ora, se è impossibile ragionare nella scienza senza qualche postulato, tale postulato deve essere essenziale all'esperienza della materia della scienza, e così otteniamo il secondo fondamento. Tuttavia i due metodi sono utili perché si completano a vicenda e il primo, dato che prende le mosse dalla scienza reale, è il metodo più sicuro e più facile di ricerca, anche se il secondo sembra più convincente per l'esposizione.

9. Lo svolgimento della mia discussione sarà quindi il seguente: nel primo capitolo, quale preliminare all'analisi logica della geometria, fornirò una breve storia della nascita e dello sviluppo dei sistemi non euclidei. Il secondo capitolo preparerà il terreno per una teoria costruttiva della geometria, con la critica di alcuni punti di vista filosofici precedenti; in que-

[2] Uso qui il termine « esperienza » nel senso più vasto possibile, il senso con cui questa parola viene usata da Bradley.

[3] Ove il ramo d'esperienza in questione sia essenziale a tutta l'esperienza, l'apriorità che ne risulta può considerarsi assoluta; ove sia necessaria soltanto a qualche scienza particolare, si considera relativa a quella.

sto capitolo cercherò di mostrare come quei punti di vista siano in parte veri e in parte falsi, e così stabilire con delle polemiche preliminari, la verità delle parti della mia teoria che si possono trovare negli scrittori precedenti. Tuttavia gran parte di questa teoria non può venire presentata così, dato che l'intero campo della geometria proiettiva, per quanto ne so, è rimasto finora ignoto ai filosofi. Nel terzo capitolo, passando dalla critica alla costruzione, tratterò dapprima della geometria proiettiva. Sosterrò che questa è necessariamente esente da ogni forma di esternalismo e dato che una qualche forma di questo genere è necessaria per l'esperienza, è completamente *a priori*. Tuttavia, nella geometria metrica che passerò ad esaminare dopo, gli assiomi ricadranno in due classi: 1) Quelli comuni agli spazi euclidei e non euclidei. Si riscontrerà che da una parte sono indispensabili per la possibilità della misurazione in qualsiasi continuo, e dall'altra sono proprietà necessarie di ogni forma di esternalismo a più di una dimensione. Perciò verranno chiamati *a priori*. 2) Gli assiomi che distinguono gli spazi euclidei da quelli non euclidei. Questi verranno considerati interamente empirici. Tuttavia, l'assioma che il numero delle dimensioni è tre, anche se empirico, poiché qui sono impossibili piccoli errori, si dirà che è esattamente e sicuramente rispondente al nostro mondo reale; mentre i due assiomi rimanenti, che determinano il valore della costante dello spazio, verranno considerati solo approssimativamente noti, e certi solo entro i limiti degli errori dell'osservazione.[4] Infine il quarto capitolo cercherà di dimostrare ciò che era stato presupposto nel capitolo terzo, che qualche forma di esternalismo è necessaria per l'esperienza, e si concluderà dimostrando l'impossibilità logica, se la conoscenza di una forma del genere deve essere liberata dalle contraddizioni, di astrarre completamente questa conoscenza da ogni riferimento alla materia contenuta nella forma.

Spero di aver toccato in questa discussione tutti i punti più importanti relativi ai fondamenti della geometria.

[4] Non ho fornito un resoconto di queste dimostrazioni empiriche, dato che sembra che siano costituite dall'intero corpo della scienza fisica. Tutto nella scienza fisica, dalla legge della gravitazione alla costruzione dei ponti, dallo spettroscopio all'arte della navigazione, verrebbe modificato profondamente da ogni notevole inesattezza nell'ipotesi che il nostro spazio reale è euclideo. Quindi la verità osservata dalla scienza fisica costituisce una schiacciante prova empirica che questa ipotesi è molto approssimatamente corretta, anche se non rigidamente valida.

1. BREVE STORIA DELLA METAGEOMETRIA

10. Quando viene attaccato un sistema affermato da lungo tempo, accade di solito che l'attacco inizi solo in un unico punto, dove è particolarmente manifesta la debolezza della dottrina riconosciuta. Ma è probabile che la critica, una volta avviata, si estenda molto al di là di quanto i più temerari avrebbero desiderato al principio.

Una volta iniziata la liquefazione, ove si giunge infine, se non all'intelligente attacco di Fichte a Dio stesso?

Ed è stato così per la geometria. Il punto di liquefazione dell'ortodossia euclidea è l'assioma delle parallele, e fu il rifiuto di accettare questo assioma senza dimostrazione a segnare l'inizio della metageometria. Il primo tentativo in questa direzione, quello di Legendre,[1] fu ispirato alla speranza di dedurre questo assioma dagli altri – una speranza che, come sappiamo adesso, era destinata a un inevitabile fallimento. Le parallele vengono definite da Legendre come linee sullo stesso piano tali che, se una terza linea le incontra, la somma degli angoli opposti interni sarà eguale a due angoli retti. Egli dimostra senza difficoltà che queste linee non si incontrano, ma non è capace di dimostrare che le linee non parallele del piano si debbano incontrare. Similmente, riesce a dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo non può superare due angoli retti, e che se in un triangolo la somma degli angoli è pari a due angoli retti, essa sarà eguale per tutti i triangoli; ma non è capace di dimostrare l'esistenza di quell'unico triangolo.

11. Il tentativo di Legendre si esaurì così; ma il fatto che

[1] *Memoires de l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France*, T. XII, 1833, che riporta per intero i suoi risultati, con riferimento agli scritti precedenti.

fosse fallito non poteva dimostrare nulla. Un metodo più ardito, suggerito da Gauss, venne portato avanti da Lobacevskij e da Bolyai.[2] Se l'assioma delle parallele è logicamente deducibile dagli altri, negandolo e mantenendo fermo il resto, dovremo riscontrare delle contraddizioni. Conseguentemente questi tre matematici attaccarono il problema indirettamente: negarono l'assioma delle parallele e ciononostante ottennero una geometria logicamente coerente. Essi dedussero che l'assioma fosse logicamente indipendente dagli altri, ed indispensabile al sistema euclideo. Il loro lavoro, che era tutto ispirato a questo motivo conduttore, può venire distinto come rappresentativo del primo periodo nello sviluppo della metageometria.

Il secondo periodo, inaugurato da Riemann, ebbe un significato molto più profondo; era in gran parte filosofico nei fini, e costruttivo nei metodi.

Questo periodo ardiva puntare nientemeno che all'analisi logica di tutti gli assiomi indispensabili della geometria, e considerava lo spazio come un caso particolare del concetto più generale di *molteplicità*. Prendendo le mosse dai metodi della geometria metrica analitica, istituì due sistemi non euclidei, il primo quello di Lobacevskij, il secondo – nel quale veniva negato anche l'assioma della linea retta nella forma di Euclide – una nuova varietà chiamata, per analogia, sferica. Il concetto principale in questo periodo è quello della *misurazione della curvatura*, un termine inventato da Gauss, che tuttavia lui aveva applicato soltanto alle superfici. Gauss aveva dimostrato che il libero movimento sulle superfici era possibile soltanto quando la misura della curvatura era costante. Riemann ed Helmholtz estesero questa proposizione a un numero *n* di dimensioni, e ne fecero la proprietà fondamentale dello spazio.

Nel terzo periodo, che ha inizio con Cayley, il motivo filosofico che aveva ispirato i primi pionieri è meno evidente, e viene sostituito da uno spirito più tecnico e matematico. Questo periodo si distingue principalmente dal secondo, da un

[2] Questo metodo più audace, par che sia stato suggerito quasi un secolo prima da un italiano, Saccheri. Il suo lavoro, che sembra sia rimasto completamente ignoto fino a che Beltrami lo riscoprì nel 1889, ha per titolo « Euclides ab omni naevo vindicatus, etc. » Mediolani, 1783 (V. Veronese, *Grundzüge der Geometrie*, traduzione tedesca, Leipzig, 1894, p. 636). I suoi risultati comprendevano lo spazio sferico come quello iperbolico; ma essi lo allarmarono tanto, che dedicò la seconda metà del suo libro a smentirli.

punto di vista matematico, per il metodo, che è proiettivo invece che metrico. Qui, il concetto matematico più importante è l'Assoluto (*Grundgebild*), una figura [conica] in relazione alla quale tutte le proprietà metriche diventano proiettive. Il lavoro di Cayley che era molto breve ed aveva attirato poco l'attenzione, è stato perfezionato ed elaborato da F. Klein, e per suo tramite ha incontrato accettazione generale. Klein ha aggiunto ai due tipi di geometria non euclidea già conosciuti, un terzo tipo che definisce ellittico; questo terzo tipo assomiglia moltissimo alla geometria sferica di Helmholtz, ma se ne distingue per l'importante differenza che in esso due linee rette si incontrano soltanto in un punto.[3] Il segno distintivo degli spazi rappresentati da entrambi è che, come la superficie di una sfera, sono finiti ma illimitati. La trasformazione delle proprietà metriche in proiettive, come verrà dimostrato in seguito, ha importanza soltanto tecnica; nello stesso tempo la geometria proiettiva è in grado di trattare direttamente delle proprietà puramente descrittive o qualitative dello spazio che sono comuni sia ad Euclide che alla metageometria. Perciò il terzo periodo ha una grande importanza filosofica, mentre il suo metodo ha una più grande bellezza ed unità, dal punto di vista matematico, di quello del secondo; è in grado di considerare tutti i tipi di spazio in una volta, cosicché ogni proposizione simbolica, secondo il significato dato ai simboli, è una proposizione in qualsiasi geometria si scelga. Ciò ha il vantaggio di dimostrare che l'ulteriore ricerca non può portare a contraddizioni nei sistemi non euclidei, a meno che allo stesso tempo non riveli contraddizioni in Euclide. Perciò questi sistemi sono, logicamente, altrettanto solidi quanto quello di Euclide stesso.

Dopo questa breve panoramica delle caratteristiche dei tre periodi, procederò a un resoconto più dettagliato. Il mio scopo sarà quello di evitare per quanto possibile tutta la tecnica

[3] Il primo resoconto di Klein sulla geometria ellittica, in seguito alla teoria proiettiva della distanza di Cayley, apparve in due articoli intitolati *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, I, II, « Math. Annalen », 4, 6 (1871-2). In seguito essa venne scoperta indipendentemente da Newcomb in un articolo intitolato *Teoremi elementari relativi alla geometria di uno spazio a tre dimensioni e di curvatura positiva uniforme nella quarta dimensione*, « Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik », Vol. 83 (1877). Per notizie sulle controversie matematiche relative alla geometria ellittica, V. Klein, *Vorlesungen über Nicht Euklidische Geometrie*, Gottingen, 1893, I, p. 284 ss. Una biblio-

matematica, e di mettere in risalto solo quei punti fondamentali nello sviluppo matematico, che paiono avere importanza logica o filosofica.

Primo periodo.

12. Non sembra che Gauss, colui che ha dato origine a tutto il sistema, per quanto riguarda strettamente la geometria non euclidea, abbia fornito più che dei risultati, in nessuno dei suoi scritti pubblicati finora: le sue dimostrazioni ci rimangono ignote. Ciononostante è stato lui il primo a investigare quali fossero le conseguenze della negazione dell'assioma delle parallele,[4] e nelle sue lettere, fece presenti queste conseguenze ad alcuni amici, fra i quali Wolfgang Bolyai. Il primo accenno all'argomento nelle sue lettere, compare quando aveva appena 18 anni; quattro anni dopo, nel 1799, scrivendo a W. Bolyai enuncia l'importante teorema che nella geometria iperbolica esiste un massimo all'area di un triangolo. Dagli scritti successivi emerge che aveva elaborato un sistema quasi altrettanto, se non proprio, completo di quelli di Lobacevskij e Bolyai.[5] Tuttavia è importante ricordare che il lavoro di Gauss sulla curvatura che *è stato* pubblicato, pose le fondamenta dell'intero metodo del secondo periodo, e venne intrapreso, secondo Riemann ed Helmholtz [6] con lo scopo di una ricerca (non pubblicata) sui fondamenti della geometria. Il suo lavoro in questa direzione, in virtù del suo metodo, verrà trattato più diffusamente nel secondo periodo, ma è interessante osservare che egli rimase, come molti pionieri, alla testa di due tendenze che in seguito hanno percorso strade diverse.

13. *Lobacevskij*, professore dell'università di Kasan, pubblicò dapprima i suoi risultati nel russo natio, durante i corsi di quella dotta istituzione degli anni 1829-1830. A motivo della

grafia della letteratura in proposito fino all'anno 1878 venne fornita da Halsted nell'« American Journal of Mathematics », Vol. 1 e 2.

[4] Veronese (*op. cit.*, p. 638) nega la priorità di Gauss quanto all'invenzione di un sistema non euclideo, anche se ammette che è stato il primo a ritenere l'assioma delle parallele indimostrabile. Il motivo su cui basa la prima affermazione pare scarsamente fondato: sulle prove contro di essa cfr. Klein, *Nicht Euklid*, I, pp. 171-4.

[5] V. *Briefwechselmit Schumacher* Bd. II, p. 268.

[6] Cf. Helmholtz, *Wiss. Abh.* II, p. 611.

doppia oscurità della lingua e del luogo, attrassero poco l'attenzione finché li tradusse in francese [7] e in tedesco; [8] anche allora non pare che abbiano ricevuto l'attenzione che meritavano, finché nel 1868 Beltrami riesumò l'articolo su « Crelle », e ne fece il tema di una brillante interpretazione.

Nell'introduzione al suo volumetto in lingua tedesca, Lobacevskij lamenta lo scarso interesse dimostrato per i suoi scritti dai compatrioti, e la trascuratezza dei matematici dopo il tentativo abortito di Legendre relativo agli inconvenienti della teoria delle parallele. Il corpo dell'opera inizia con l'enunciazione di molte proposizioni importanti che si dimostrano valide nel sistema proposto come in quello di Euclide; di esse, alcune sono in ogni caso indipendenti dall'assioma delle parallele, mentre altre vengono rese tali sostituendo alla parola « parallele » la frase « non intersecanti per quanto si prolunghino ». Segue quindi una definizione costruita intenzionalmente in modo da contraddire quella di Euclide: Rispetto a una data retta, tutte le altre sullo stesso piano possono dividersi in due classi, quelle che incontrano la linea retta data, e quelle che non la incontrano; la linea che rappresenta il limite tra le due classi viene definita *parallela* alla linea retta data. Ne consegue che da qualsiasi punto esterno, possono venire tracciate due parallele [alla retta data], una in ciascuna direzione. Da questo punto di inizio, col metodo sintetico euclideo, viene dedotta una serie di proposizioni; la più importante di esse è che in un triangolo la somma degli angoli è sempre minore, o sempre eguale a due angoli retti, mentre in quest'ultimo caso l'intero sistema diventa ortodosso. Viene anche dimostrata una certa analogia con la geometria sferica – il cui significato e portata appariranno in seguito – che consiste all'incirca nella sostituzione delle funzioni iperboliche a quelle circolari.

14. Il sistema di Johann Bolyai è molto simile, tanto simile in effetti, da far sembrare assolutamente incredibile l'indipendenza dei due lavori, che pure è un fatto ben accertato. Johann Bolyai pubblicò per la prima volta i suoi risultati nel 1832, nell'appendice di un'opera del padre Wolfgang, intitolata: « Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens:

[7] « Crelle's Journal », 1837.

[8] *Theorie der Parallellinien*, Berlin, 1840. Ripubblicato a Berlino, 1887. Tradotto da Halsted, Austin, Texas (USA), 4ª ediz., 1892.

a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica ». Gauss, di cui era diventato l'amico fidato a scuola rimanendolo per tutta la vita, era come abbiamo visto, l'ispiratore di Wolfgang Bolyai, e soleva dire che quest'ultimo era l'unico ad apprezzare le sue speculazioni filosofiche sugli assiomi della geometria; ciononostante pare che Wolfgang abbia affidato al figlio Johann l'elaborazione dettagliata del sistema iperbolico. I lavori di entrambi i Bolyai sono molto difficili da trovare e il loro metodo, come i risultati, mi sono noti solo attraverso le versioni di Frischauf ed Halsted.[9] Quanto sia al metodo, che ai risultati, il sistema è molto simile a quello di Lobacevskij, cosicché non sarà necessario soffermarci molto su nessuno dei due. Soltanto i postulati iniziali che sono più espliciti di quelli di Lobacevskij richiedono un breve commento. L'introduzione di Frischauf che ha un tono filosofico e newtoniano, inizia dichiarando che la geometria tratta dello spazio assoluto (vuoto), che si ottiene astraendosi dai corpi che contiene, che due figure si dicono congruenti quando differiscono solo per la posizione, e che l'assioma della congruenza è indispensabile ad ogni determinazione di grandezze spaziali. La congruenza doveva riferirsi a corpi geometrici, senza nessuna delle proprietà dei corpi ordinari, tranne l'impenetrabilità (Erdmann, *Axiome der Geometrie* p. 26). Si definisce una linea retta, determinata da due dei suoi punti,[10] e un piano, determinato da tre. Queste premesse, con una piccola eccezione quanto alla linea retta, le troveremo qui di seguito indispensabili ad ogni geometria. Ho attirato l'attenzione su di esse perché si ritiene spesso che i non euclidei neghino l'assioma della congruenza, il che, qui come altrove, non è mai il caso. L'importanza conferita a questo assioma da parte di Bolyai è probabilmente dovuta all'influenza di Gauss, il cui lavoro sulla curvatura delle superfici pose le basi dell'uso fatto da Helmholtz della congruenza.

15. È importante ricordare che per tutto il periodo che abbiamo appena esaminato, lo scopo della geometria iperbolica

[9] Frischauf, *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, Leipzig, 1872. Halsted, *La scienza assoluta dello spazio*, tradotto dal latino, 4ª ediz., Austin, Texas (USA), 1896.

[10] Sia Lobacevskij che Bolyai, come nota Veronese, partono dalla coppia di punti piuttosto che dalla distanza. V. Frischauf, *Absolute Geometrie*, « Anhang ».

è indiretto: il motivo principale del lavoro non è la verità di quest'ultima, ma l'indipendenza logica dell'assioma delle parallele dal resto. Se negando l'assioma delle parallele e mantenendo fermo il resto, possiamo ottenere un sistema esente da contraddizioni logiche, ne consegue che l'assioma delle parallele non può essere implicitamente contenuto negli altri. Se le cose stanno così, i tentativi di fare a meno dell'assioma, come quello di Legendre, non possono aver successo; Euclide rimarrà sul piedistallo o cadrà con l'assioma incriminato. Naturalmente rimaneva la possibilità che con gli ulteriori sviluppi, avrebbero potuto rivelarsi delle contraddizioni latenti in quei sistemi. Comunque questa eventualità venne eliminata dal lavoro più diretto e costruttivo del secondo periodo, al quale dobbiamo volgere adesso la nostra attenzione.

Secondo periodo.

16. Il lavoro di Lobacevskij e Bolyai rimase senza seguito per circa un quarto di secolo – in effetti, le ricerche di Riemann ed Helmholtz, quando giunsero, sembra siano state ispirate non da costoro, ma piuttosto da Gauss[11] ed Herbart. Conseguentemente, riscontriamo una grandissima differenza tra il primo periodo ed il secondo, sia nel fine che nel metodo. Il primo, partendo dalla critica di un punto del sistema di Euclide, conservava il suo metodo sintetico mentre respingeva uno dei suoi assiomi. Il secondo, invece, essendo animato da uno spirito filosofico piuttosto che matematico, cercava di classificare il concetto di spazio come una specie di un concetto più generale: trattava lo spazio algebricamente, e le proprietà che attribuiva allo spazio erano espresse in termini non intuitivi, ma algebrici. Lo scopo di Riemann ed Helmholtz era quello di dimostrare, presentando delle alternative logicamente possibili, la natura empirica degli assiomi ricevuti. A questo fine, essi ritenevano che lo spazio fosse un caso particolare del molteplice e dimostrarono che erano matematicamente possibili diversi rapporti di grandezza (*Massverhaltnisse*) in un molteplice esteso. La loro filosofia, che mi pare non sia sempre irreprensibile, verrà discussa nel secondo capitolo; qui, mentre è importante ricordare l'ispirazione filosofica di Riemann ed Helmholtz, limiteremo la nostra attenzione alla parte matematica

[11] Cfr. Stallo, *Concetti della fisica moderna*, p. 248.

del loro lavoro. Così facendo, mentre temo che mutileremo in qualche modo la sistematicità del loro pensiero, saremo sicuri di una più compatta unità dell'argomento, e di un resoconto più fedele dello sviluppo puramente matematico. Ma a mio parere, c'è un altro motivo per separare la loro filosofia dalla matematica. Mentre lo scopo filosofico era quello di dimostrare che tutti gli assiomi della geometria sono empirici, e che un diverso contenuto dell'esperienza avrebbe potuto cambiarli tutti, il risultato involontario del loro lavoro matematico fu, se non mi sbaglio, quello di fornire il materiale per una dimostrazione *a priori* di alcuni assiomi. Tali assiomi, anche se essi ritenevano che non fossero necessari, venivano sempre introdotti nelle loro opere matematiche prima di porre i fondamenti dei sistemi non euclidei. Nel terzo capitolo sosterrò che questa conservazione era logicamente inevitabile, e non fu dovuta semplicemente, come essi ritenevano, al desiderio di conformarsi all'esperienza. Se ho ragione a questo proposito, c'è una divergenza tra Riemann ed Helmholtz filosofi, e Riemann ed Helmholtz matematici. Questa divergenza rende ancor più opportuno tracciare lo sviluppo matematico separatamente dalla filosofia che lo accompagna.

17. L'opera di Riemann che fece epoca, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen* [12] venne scritta e letta a una cerchia ristretta nel 1854; tuttavia, a causa di alcuni cambiamenti che desiderava apportarvi, rimase inedita fino al 1867, quando venne pubblicata dai suoi esecutori testamentari. I due concetti fondamentali, sulla cui invenzione poggia l'importanza storica della dissertazione sono quelli di *molteplice* [13] e quello di *misurazione della curvatura* del molteplice. Il primo concetto serve a uno scopo principalmente filosofico, ed è studiato essenzialmente per mostrare lo spazio come un caso particolare di un concetto più generale. Su questo aspetto del molteplice, avrò molto da dire nel secondo capitolo; il suo aspetto matematico, che è il solo che qui ci interessa, è meno complicato e ha dato origine a meno controversie.

[12] *Gesammelte Werke*, pp. 255-68.

[13] Riguardo alla storia di questa parola, v. Stallo, *Concetti della fisica moderna*, p. 258. Venne usata da Kant, e adattata da Herbart con quasi lo stesso significato che ha in Riemann. Tuttavia Herbart usa anche la parola *Reihenform* per esprimere un'idea simile. V. *Psychologie als Wissenschaft*, I, par. 100, e II, par. 139, dove viene suggerita anche l'analogia con i colori di Riemann.

Il secondo concetto ha anch'esso un doppio scopo, ma il suo impiego matematico è il più importante. Prenderemo in considerazione questi due concetti successivamente.

18. (1) *Il concetto di molteplice.* Il fine generale della dissertazione di Riemann è quello di mostrare gli assiomi come passi successivi nella classificazione della specie spazio. Gli assiomi della geometria quali segni distintivi della definizione scolastica, appaiono determinazioni successive di concetti di classe, che finiscono nello spazio euclideo. Così, dal punto di vista analitico, abbiamo una formulazione logica e precisa quanto si può desiderare – una formulazione nella quale, per la caratteristica della classificazione, sembra che siamo sicuri di non avere niente di superfluo o sovrabbondante, ed otteniamo gli assiomi esplicitamente, nella forma più auspicabile, cioè quali attributi del concetto di spazio. Nello stesso tempo, è un peccato che Riemann, secondo il pregiudizio metrico della sua epoca, abbia considerato lo spazio principalmente una grandezza,[14] o un insieme di grandezze, in cui il problema più importante è di assegnare una quantità ai diversi elementi o punti, senza considerare la natura qualitativa delle quantità assegnate. Così, è derivata notevole oscurità circa l'intera natura della grandezza.[15] Questo punto di vista della geometria sottintende la definizione del molteplice come concetto generale, del quale lo spazio rappresenta un caso speciale. Questa definizione, non molto chiara, si può interpretare come segue.

19. I concetti di grandezza, secondo Riemann, sono possibili soltanto ove si abbia un concetto generale passibile di varie determinazioni (*Bestimmungsweisen*). Le varie determinazioni di un concetto del genere, tutte insieme, formano un *molteplice*, che è continuo o discontinuo, secondo che il passaggio da una determinazione all'altra sia continuo o discontinuo. I pezzetti specifici del molteplice, o quanta, possono venire messi in relazione col calcolo se discontinui, e con la misurazione se continui. « La misurazione consiste nella sovrapposizione delle grandezze da paragonare. In mancanza di ciò, le grandezze possono venire paragonate soltanto quando una è parte dell'altra, e allora si può determinare soltanto il più o il meno, non il quanto » (p. 256). Giungiamo così al concetto generale di

[14] Erdmann, *Grossenbegriff vom Raum.*

[15] Veronese, *op. cit.*, p. 642: « Riemann ist in seiner Definition des Begriffs Grosse dunkel ». V. anche tutta la critica successiva di Veronese.

un molteplice a molte dimensioni, di cui lo spazio e i colori vengono indicati come casi speciali. Riemann attribuisce all'assenza di questo concetto l'« oscurità » che sull'argomento degli assiomi « durò da Euclide a Legendre » (p. 254.) E Riemann è certamente riuscito, da un punto di vista algebrico, a dimostrare molto più chiaramente di chiunque lo abbia preceduto, gli assiomi che distinguono la quantità spaziale dalle altre quantità di cui tratta la matematica. Ma a causa della supposizione iniziale che lo spazio può venire considerato una quantità, è stato indotto a impostare il problema come: che tipo di grandezza è lo spazio?, piuttosto che: cosa deve essere lo spazio perché possiamo considerarlo una grandezza? Non si rende neanche conto – in effetti ai suoi tempi erano pochi quelli che se ne rendevano conto – che è possibile una geometria elaborata che non tratti lo spazio come una quantità. Quindi la sua definizione dello spazio come una specie del molteplice, anche se ai fini analitici definisce molto soddisfacentemente la natura delle grandezze spaziali, lascia nell'oscurità il vero fondamento di questa natura, che si trova nella natura dello spazio come sistema di relazioni, ed è antecedente alla possibilità di considerarlo un sistema di grandezze.

Ma seguiteremo poi con lo sviluppo matematico del pensiero di Riemann. Abbiamo visto che affermava che la misurazione consiste nella sovrapposizione delle grandezze da paragonare. Tuttavia, affinché ciò possa rappresentare un mezzo possibile per determinare delle grandezze, continua, tali grandezze devono essere indipendenti dalla localizzazione nel molteplice (p. 259). Egli dice che ciò può accadere in molti modi, e suppone che il più semplice di essi sia che la lunghezza delle linee è indipendente dalla loro posizione. Saremmo lieti di conoscere quali altri modi sono possibili: per parte mia, non riesco a immaginare per quale altra ipotesi la grandezza potrebbe essere indipendente dal luogo. Comunque, lasciando questo da parte, il problema, in virtù del fatto che la misurazione consiste nella sovrapposizione, si identifica con la determinazione del molteplice più generale, nel quale le grandezze sono indipendenti dal luogo. Ciò ci porta all'altro concetto fondamentale di Riemann, che mi pare più fruttuoso di quello di molteplice.

20. (2) *Misurazione della curvatura.* Questo concetto è dovuto a Gauss, che tuttavia lo applicò solo alle superfici; la novità nella dissertazione di Riemann fu la sua estensione a un

molteplice a *n* dimensioni. Tuttavia questa estensione viene espressa piuttosto brevemente e oscuramente, ed è stata resa ancor più oscura dai tentativi di Helmholtz di una esposizione popolare. Inoltre, il termine *curvatura* è ingannevole, cosicché la frase è stata fonte di molti malintesi, perfino tra i matematici, più di qualsiasi altra nella pangeometria. Viene spesso dimenticato, nonostante l'affermazione esplicita di Helmholtz[16] che « la misurazione della curvatura » di un molteplice a *n* dimensioni è un'espressione puramente analitica, che ha un'affinità soltanto simbolica con la curvatura ordinaria. Quando si applica allo spazio a tre dimensioni, l'implicazione di uno spazio « piano » a quattro dimensioni è del tutto fuorviante; perciò di solito userò invece il termine di costante spaziale.[17] Purtuttavia, poiché storicamente il concetto è scaturito da quello di curvatura, darò una brevissima esposizione dello sviluppo storico delle teorie della curvatura.

Come la nozione di *lunghezza* è derivata inizialmente dalla linea retta, e si è estesa alle altre curve dividendole in linee rette infinitesimali, così la nozione di curvatura è derivata dal cerchio, e si è estesa alle altre curve dividendole in archi circolari infinitesimali. La curvatura può considerarsi, inizialmente, come la misura della quantità secondo la quale una curva si diparte da una linea retta; in un cerchio che è dappertutto simile, questa quantità è evidentemente costante, e viene misurata dal reciproco del raggio. Ma in tutte le altre curve la quantità della curvatura varia da punto a punto, cosicché non può essere misurata senza gli infinitesimali. La misura che viene immediatamente spontanea, è la curvatura del cerchio che coincide più esattamente con la curva nel punto considerato. Dato che un cerchio viene determinato da tre punti, esso passerà per tre punti consecutivi della curva. Abbiamo così definito la curvatura di qualsiasi curva, uniforme o tortuosa; dato che tre punti di essa giacciono in un piano, tale cerchio potrà sempre descriversi. Se passiamo a una superficie, ciò che vogliamo è, per analogia, la misurazione di quanto si discosti da un piano. La curvatura, come è stata definita sopra, è divenuta indeterminata, perché per ogni punto della superficie possiamo tracciare un numero infinito di archi che, in generale, non avranno tutti la stessa curvatura. Perciò, tracciamo tutte le

[16] *Vorträge und Reden*, vol. II, p. 18.
[17] Klein, *Nicht Euklid*, I, p. 160.

geodetiche che uniscono il punto in questione ai punti vicini della superficie, in tutte le direzioni. Dato che questi archi formano un molteplice singolarmente infinito, fra di essi, se non hanno tutti la stessa curvatura, vi sarà un arco di curvatura massima ed uno di curvatura minima.[18] Il prodotto di tali curvature massime e minime, è definito *la misura della curvatura* della superficie nel punto considerato. Per fornire alcuni semplici esempi: su una sfera, la curvatura di ognuna di tali linee è eguale al reciproco del raggio della sfera, per cui la misura della curvatura è ovunque il quadrato del reciproco del raggio della sfera. Su una superficie qualsiasi, come un cono o un cilindro, sulla quale possano venire tracciate linee rette, queste non hanno curvatura, cosicché la misurazione della curvatura è ovunque zero – in particolare, questo è il caso del piano. Comunque, in generale, la misura della curvatura di una superficie varia da punto a punto.

Gauss, l'inventore di questo concetto,[19] dimostrò che perché due superfici possano risultare sviluppabili l'una nell'altra – cioè siano tali che una possa venire mutata nella forma dell'altra senza sforzare né strappare – è necessario che le due superfici abbiano eguale misura di curvatura in punti corrispondenti. Quando ciò avviene, ogni figura che è possibile sull'una è in generale possibile sull'altra, ed entrambe hanno praticamente la stessa geometria.[20] Come corollario, ne consegue che condizione necessaria per il libero movimento delle figure su qualsiasi superficie, è la misura della curvatura costante.[21] Minding dimostrò che questa condizione era sufficiente oltre che necessaria.[22]

[18] Dato che stiamo considerando la curvatura in un punto, ci interessano soltanto i primi elementi infinitesimali delle geodetiche che partono da quel punto.

[19] *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, « Werke » vol. IV, 1827; §§ 219-288.

[20] Ciononostante le geometrie di superfici diverse di eguale curvatura sono soggette a differenze importanti. Per esempio, il cilindro è una superficie di curvatura zero, ma dato che le sue linee di curvatura in una direzione sono finite, la sua geometria coincide con quella del piano soltanto per lunghezze inferiori alla circonferenza del cerchio che lo genera (v. Veronese, *op. cit.*, p. 644). Due geodetiche su un cilindro possono incontrarsi in molti punti. Quanto alle superfici di curvatura zero per le quali questo non è possibile, l'identità col piano può considerarsi valida. Altrimenti, l'identità si estende solo alle proprietà delle figure che non superano una certa misura.

[21] Perché possiamo considerare due parti diverse della stessa superficie come parti corrispondenti di superfici diverse; la proposizione di cui sopra dimostra quindi che una figura può venire riprodotta in una parte quando è stata disegnata in un'altra, se la misura della curvatura delle due parti corrisponde.

[22] « Crelle », vol. XIX, XX, 1839-40.

21. Finora, siamo andati col vento in poppa – abbiamo trattato di concetti puramente geometrici in un modo puramente geometrico – ma non abbiamo ancora trovato nessun significato della misura della curvatura, secondo il quale essa può venire estesa allo spazio, e ancor meno a un multiforme a n dimensioni. A questo fine, dobbiamo esaminare il metodo di Gauss che ci rende possibile determinare la misurazione della curvatura di una superficie in qualsiasi punto, come una proprietà inerente, del tutto indipendente da qualsiasi riferimento a una terza dimensione.

Il metodo per determinare la misurazione della curvatura dall'interno è in breve il seguente: Se un qualsiasi punto sulla superficie viene determinato da due coordinate, u e v, i piccoli archi della superficie sono dati dalla formula

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

dove E, F e G sono in generale, funzioni di u, v.[23] Da questa sola formula, senza riferimento ad alcuno spazio esterno alla superficie, possiamo determinare la misura della curvatura nel punto u, v quale funzione di E, F, G, e i loro differenziali rispetto a u e v. Così, possiamo considerare la misura della curvatura di una superficie come una proprietà inerente, e la definizione geometrica di cui sopra, che comportava il riferimento a una terza dimensione, può venire tralasciata. Ma a questo punto è necessario un avvertimento. Nel secondo capitolo (par. 176) apparirà che è logicamente impossibile stabilire un sistema preciso di coordinate, nel quale le coordinate rappresentano grandezze spaziali, senza l'assioma del Libero Movimento, e questo assioma, come abbiamo appena visto, vale per le superfici solo quando la misura della curvatura è costante. Perciò la nostra definizione della misura della curvatura sarà *veramente* libera da riferimenti a una terza dimensione soltanto quando trattiamo di superfici la cui misura della

[23] In questa formula u e v possono essere le lunghezze delle linee o gli angoli tra le linee disegnate sulla superficie, senza così avere nessun necessario riferimento a una terza dimensione.

curvatura è costante – un punto che Riemann trascura completamente. Tuttavia questo avvertimento vale soltanto per lo spazio, e se accettiamo il sistema di coordinate come presupposto nel concetto del molteplice, possiamo ignorare del tutto l'avvertimento – mentre ricordiamo che la possibilità di un sistema di coordinate nello spazio comporta assiomi su cui si dovrà investigare più avanti. Possiamo vedere così, quale significato si può attribuire, senza riferimento ad alcuna dimensione superiore, alla misura della curvatura costante in uno spazio a tre dimensioni, o a qualsiasi misura della curvatura in un molteplice ad n dimensioni in generale.

22. Tale significato viene fornito dalla dissertazione di Riemann, alla quale possiamo adesso ritornare, dopo questa lunga digressione. Possiamo definire molteplice continuo, qualsiasi continuo di elementi, tale che un unico elemento viene definito da n grandezze continuamente variabili. Questa definizione in realtà non comporta lo spazio, perché le coordinate nello spazio non definiscono un punto, ma le sue relazioni rispetto all'origine, che in se stessa è arbitraria. Comporta tuttavia il concetto analitico di spazio del quale tratta Riemann, e perciò per il momento possiamo lasciarlo stare. Riemann presuppone poi che la differenza – o la distanza, come si può inesattamente chiamare – tra due elementi qualsiasi, è paragonabile, per quanto riguarda la grandezza, alla differenza fra qualsiasi altri due. Inoltre presuppone ciò che è merito di Helmholtz aver dimostrato, che la differenza ds tra due elementi consecutivi può venire espressa come la radice quadrata della funzione di secondo grado delle differenze delle coordinate, cioè

$$ds^2 = \Sigma_1^n \Sigma_1^n \; a_{ik}\, dx_i \, . \, dx_k,$$

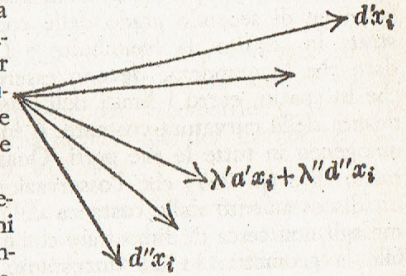
dove i coefficienti a_{ik} sono, in generale, funzioni delle coordinate $x_1, x_2 \ldots x_n$.[24] La domanda è: Come si otterrà una definizione della misura della curvatura da questa formula? Si deve notare in primo luogo che, come in una superficie troviamo un numero infinito di raggi di curvatura in un punto, così in un

[24] In ciò che segue, ho fornito piuttosto l'esposizione di Riemann fatta da Klein, che quella dello stesso Riemann. Il primo è molto più esteso e chiaro, e non differisce sostanzialmente in alcun modo. V. Klein, *Nicht Euklid*, I, pp. 206 ss.

molteplice di tre o più dimensioni, troveremo un numero infinito di misure di curvatura in un punto, una per ogni molteplice a due dimensioni che passa per quel punto, contenuto nel molteplice superiore. Quindi, ciò che dobbiamo fare per prima cosa, è definire tali molteplici a due dimensioni. Essi debbono consistere, come abbiamo visto per la superficie, di una serie singolarmente infinita di geodetiche che passano per il punto. Ora, una geodetica viene determinata interamente da un punto e dalla sua direzione in quel punto, o da un punto e dal punto ad esso consecutivo. Per cui una geodetica che passa per il punto considerato viene determinata dai rapporti incrementali delle coordinate $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$. Supponiamo di avere due di tali geodetiche i cui incrementi i'esimi siano rispettivamente $d'x_i$ e $d''x_i$. Allora, tutte le geodetiche date da

$$dx_i = \lambda' d'x_i + \lambda'' d''x_i$$

formeranno una serie singolarmente infinita, dato che contengono un solo parametro, e precisamente $\lambda' : \lambda''$. Tale serie di geodetiche formerà perciò un molteplice a due dimensioni con una misura della curvatura nel senso gaussiano normale. Questa misura della curvatura può venire determinata dalla formula di cui sopra per l'arco elementare, con l'aiuto della formula generale di Gauss cui ci si riferisce sopra.



Otteniamo così un numero infinito di misurazioni della curvatura in un punto, tuttavia possiamo dedurre le rimanenti da $\frac{n(n-1)}{2}$ di esse. (Riemann, *Gesammelte Werke*, p. 262) Quando tutte le misurazioni della curvatura in un punto sono costanti, ed eguali a tutte le misurazioni della curvatura in qualsiasi altro punto, otteniamo ciò che Riemann chiama un molteplice di curvatura costante. In un molteplice del genere, è possibile il libero movimento, e le posizioni non differiscono intrinsecamente l'una dall'altra. Se a è la mi-

sura della curvatura, la formula dell'arco diventa in questo caso

$$ds^2 = \Sigma\, dx^2 (1 + \frac{a}{4}\ \Sigma\, x^2)^2$$

Come ho indicato prima, soltanto in questo caso il termine « misura della curvatura » può venire opportunamente applicato allo spazio senza riferimento a una dimensione superiore, dato che il libero movimento è logicamente indispensabile all'esistenza della geometria quantitativa o metrica.

23. Il risultato matematico della dissertazione di Riemann può venire riassunto come segue. Supponendo che sia possibile applicare una grandezza allo spazio, cioè determinare i suoi elementi e figure a mezzo di quantità algebriche, ne consegue che lo spazio può rientrare nel concetto di molteplice, come un sistema di elementi quantitativamente determinabili. Tuttavia, a causa della natura particolare della misurazione spaziale, la determinazione quantitativa dello spazio esige che le grandezze siano indipendenti dalla localizzazione – ed in quanto non è questo il caso, la nostra misurazione sarà necessariamente non accurata. Se adesso supponiamo quale rapporto quantitativo della distanza tra due elementi, la radice quadrata della funzione di secondo grado delle coordinate – formula dimostrata in seguito da Helmholtz e Lie – ne consegue allora, dato che le grandezze devono essere indipendenti dal luogo, che lo spazio, entro i limiti dell'osservazione, deve avere una misura della curvatura costante, o in altre parole, deve essere omogeneo in tutte le sue parti. Quanto all'infinitesimale, Riemann dice (p. 267) che l'osservazione non potrebbe rivelare un discostamento dalla costanza della misura della curvatura; ma egli non cerca di dimostrare come potrebbe rimanere possibile la geometria in tali circostanze e l'unica geometria che ha costruito è basata interamente sul libero movimento. Nel terzo capitolo cercherò di dimostrare che qualsiasi geometria metrica che dovesse tentare di fare a meno di questo assioma sarebbe logicamente impossibile. Per il momento, farò presente soltanto che Riemann, nonostante desiderasse dimostrare che si può fare a meno di tutti gli assiomi, purtuttavia, nel suo lavoro matematico, ha mantenuto tre assiomi fondamentali, cioè il Libero Movimento, il numero intero finito di dimensioni, e l'assioma che tra due punti esiste una relazione

unica, cioè la distanza. Questi, come vedremo in seguito, nell'effettivo lavoro matematico, vengono mantenuti da tutti i metageometri metrici, anche quando sono convinti, come Riemann ed Helmholtz, che nessun assioma è filosoficamente indispensabile.

24. *Helmholtz*, il discepolo più prossimo storicamente a Riemann, era guidato da una filosofia empirica simile, e giunse per suo conto a un metodo molto somigliante di formulazione degli assiomi. Nonostante che Helmholtz non pubblicasse nulla sull'argomento fino a dopo la morte di Riemann, in quel momento aveva appena visto la dissertazione di Riemann (che venne pubblicata postuma) ed aveva elaborato i risultati, per quanto fossero allora incompleti, del tutto indipendentemente da Riemann come da Lobacevskij. Helmoltz è di gran lunga il più ampiamente letto di tutti gli scrittori di metageometria, e i suoi scritti, quasi unici, rappresentano per i filosofi il punto di vista matematico moderno sull'argomento. Ma la sua importanza è molto maggiore, in questo ambito, quale filosofo che non quale matematico; quasi l'unico suo risultato matematico originale per quanto riguarda la geometria, è la dimostrazione della formula di Riemann dell'arco infinitesimale, e anche questa dimostrazione era lungi dall'essere rigorosa, finché Lie non la modificò col suo metodo dei gruppi continui. Perciò in questo capitolo, serve soltanto che ci occupiamo di due dei suoi scritti, cioè i due articoli sulla « Wissenschaftliche Abhandlungen », vol. II, intitolati rispettivamente « Über die thatsachlichen Grundlagen der Geometrie », 1866 (p. 610 ss.), e « Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde Liegen», 1868 (p. 618 ss.).

25. Nel primo di essi, che è principalmente filosofico, Helmholtz fornisce degli accenni sul suo lavoro matematico allora incompleto, ma in generale si limita all'enunciazione dei risultati. Annuncia che dimostrerà la formula di secondo grado di Riemann per l'arco infinitesimale, ma a questo scopo, egli afferma, dobbiamo *partire* dalla congruenza, dato che senza di essa è impossibile la misurazione spaziale. Tuttavia, egli sostiene che la congruenza è dimostrata dall'esperienza. Come potremmo scoprire errori di congruenza senza l'ausilio della misurazione, è un punto che lascia in sospeso. Poi, egli enuncia i quattro assiomi seguenti, che considera essenziali alla geometria.

I. *Riguardo alla continuità e alle dimensioni.* In uno spazio ad n dimensioni, un punto è determinato unicamente dalla misura di un numero n di variabili continue (coordinate).

II. *Riguardo all'esistenza dei corpi rigidi mobili.* Tra le $2n$ coordinate di qualsiasi coppia di punti in un corpo rigido, esiste un'equazione che è la stessa per tutte le coppie di punti congruenti. Considerando un numero sufficiente di coppie di punti, otteniamo più equazioni che quantità ignote; ciò ci fornisce un metodo per determinare la forma di tali equazioni, in modo da rendere possibile che esse siano tutte soddisfatte.

III. *Riguardo al libero movimento.* Ciascun punto può passare liberamente e continuamente da una posizione all'altra. Dalla 2) e dalla 3) consegue che se due sistemi A e B possono essere congruenti in una data posizione, ciò è possibile anche per ogni altra posizione.

IV. *Riguardo all'indipendenza della rotazione nei corpi rigidi* (Monodromia). Se un numero n-1 di punti in un corpo rimangono fissi cosicché ogni altro punto può descrivere solo una certa curva, quella curva è chiusa.

Helmholtz afferma che questi assiomi, insieme all'assioma delle tre dimensioni, bastano a indicare i sistemi euclidei e non-euclidei come le uniche alternative. Che essi *bastino*, matematicamente, non può venire negato, ma sotto qualche aspetto, pare che vadano troppo oltre. In primo luogo, non c'è alcuna necessità di fare valere l'assioma della congruenza per i corpi rigidi reali – su questo argomento mi sono soffermato nel secondo capitolo.[25] E ancora, non è in alcun modo necessario che il libero movimento, separato dalla congruenza, venga formulato in modo speciale: quale barriera potrebbe rappresentare lo spazio vuoto al procedere di un punto? L'assioma rientra nella omogeneità dello spazio, che è tutt'uno con l'assioma della congruenza. La monodromia è stata anche severamente criticata; non solo è evidente che avrebbe potuto venire inclusa nella congruenza, ma anche da un punto di vista puramente analitico, Sophus Lie ha dimostrato che è superflua.[26] Così l'assioma della congruenza, correttamente formulato, include il terzo e il quarto assioma di Helmholtz, e parte del secondo. Tutti e quattro, o piuttosto tutto ciò che in essi

[25] V. par. 69-73.

[26] *Grundlagen der Geometrie*, I e II, « Leipziger Berichte », 1890; v. alla fine del presente capitolo, par. 45.

è importante per la geometria, come vedremo dopo, sono la conseguenza dell'unico principio fondamentale della relatività della posizione.

26. Il secondo articolo, che è essenzialmente matematico, fornisce la promessa dimostrazione della formula dell'arco, che è il contributo più importante di Helmholtz alla geometria. Riemann *aveva presupposto* che questa formula fosse la più semplice tra un certo numero di alternative: Helmholtz dimostrò che essa era conseguenza necessaria dei suoi assiomi. Questo documento inizia con una breve ripetizione del precedente, compresa l'enunciazione degli assiomi, ai quali ne vengono aggiunti altri due alla fine, 5) che lo spazio ha tre dimensioni, e 6) che lo spazio è infinito. Nel testo si presuppone, come nel primo articolo, che la misura della curvatura non possa essere negativa, e conseguentemente che uno spazio infinito debba essere euclideo. Questo errore viene corretto in entrambi i documenti nelle note, aggiunte dopo l'apparizione dell'articolo di Beltrami sulla curvatura negativa. È un esempio del carattere poco professionale del lavoro matematico di Helmholtz sull'argomento, che provoca i seguenti commenti da parte di Klein: [27] « Helmholtz non è un matematico di professione, ma un fisico e un fisiologo... Da questo carattere non matematico di Helmholtz deriva naturalmente che egli non tratta la parte matematica del suo lavoro con il rigore che si richiederebbe a un matematico di professione (*von Fach*) » Lui stesso ci racconta che fu lo studio fisiologico della vista a portarlo al problema degli assiomi, ed è come fisico che fa riferire questi assiomi ai corpi rigidi reali. Conseguentemente, riscontriamo errori nella sua matematica, come l'assioma della monodromia, e il presupposto che la misura della curvatura debba essere positiva. Ciononostante, la dimostrazione della formula dell'arco di Riemann è estremamente abile e nell'insieme è stata confermata dalle ricerche più approfondite di Lie.

27. Gli altri scritti di Helmholtz sulla geometria sono quasi interamente filosofici, e verranno discussi diffusamente nel secondo capitolo. Per il momento, possiamo passare all'unico altro scrittore importante del secondo periodo, *Beltrami*. Dato che il suo lavoro è puramente matematico e contiene pochi

[27] *Nicht Euklid*, I, pp. 258-9.

punti controversi, non ci soffermeremo molto su di esso nonostante la sua importanza.

Il *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*[28] che è limitata principalmente a due dimensioni, interpreta i risultati di Lobacevskij col metodo caratteristico del secondo periodo. Dimostra, sviluppando il lavoro di Gauss e Minding,[29] che tutte le proposizioni nella geometria piana che Lobacevskij aveva enunciato, valgono, entro lo spazio ordinario euclideo, per le superfici di curvatura negativa costante. Come fa notare Klein,[30] è strano che questa interpretazione, che era nota a Riemann e forse perfino a Gauss, fosse rimasta per tanto tempo senza venire esplicitamente enunciata. Ed è ancor più strano perché la « Geometrie Imaginaire » di Lobacevskij era apparsa sul vol. XVII di « Crelle »,[31] e l'articolo di Minding cui segue immediatamente l'interpretazione, era apparso sul vol. XIX di « Crelle ». Minding aveva dimostrato che la geometria delle superfici di curvatura negativa costante, con particolare riguardo ai triangoli geodetici, poteva venire dedotta da quella della sfera, attribuendo al raggio un valore *ia*[32] puramente immaginario. Come abbiamo visto, questo risultato era stato ottenuto anche da Lobacevskij nella sua geometria, eppure ci vollero trent'anni prima che tale collegamento fosse portato all'attenzione generale.

28. Nel *Saggio* di Beltrami, le linee rette naturalmente sono sostituite dalle geodetiche; le coordinate si ottengono con la corrispondenza, punto per punto, con un piano ausiliario, nel quale le linee rette corrispondono alle geodetiche della superficie. Così le geodetiche hanno equazioni lineari e sono sempre univocamente determinate da due punti. Tuttavia le distanze sulla superficie non sono eguali alle distanze sul piano; così, mentre la superficie è infinita, la parte di piano corrispondente è contenuta entro un dato cerchio finito. La distanza tra

[28] « Giornale di Matematiche », vol. VI, 1868. Tradotto in francese da J. Houel negli « Ann. Scient. de l'Ec. Norm. Sup. », vol. VI, 1869.
[29] « Crelle's Journal », vol. XIX, XX, 1839-40.
[30] *Nicht Euklid*, I, p. 190.
[31] Questo articolo è più trigonometrico ed analitico del libro tedesco, e quindi rende l'interpretazione di cui sopra particolarmente evidente.
[32] Superfici del genere non sono per niente particolarmente rare. Una di esse, per esempio è formata dalla rivoluzione della comune trattrice

$$x = a \text{ sen } \varphi,\ y = a\ (\text{logtan } \frac{\varphi}{2} + \cos.\ \varphi)$$

due punti sulla superficie è una data funzione delle coordinate, non la funzione ordinaria della geometria elementare. Queste relazioni tra piano e superficie sono importanti riguardo alla teoria della distanza di Cayley che esamineremo subito dopo. Se dovessimo definire la distanza sul piano come la funzione delle coordinate che fornisce la distanza corrispondente sulla superficie, otterremmo ciò che Klein definisce « un piano con un sistema di misurazione iperbolico (*Massbestimmung*) » nel quale varrà la teoria della distanza di Cayley. Tuttavia è evidente che nello stabilire il sistema di coordinate è stata presupposta la nozione ordinaria della distanza, cosicché, in realtà, non otteniamo geometrie diverse su uno stesso ed unico piano. Il significato di queste osservazioni apparirà più completamente quando giungeremo a trattare di Cayley e Klein.

29. Il valore del saggio di Beltrami, ai suoi stessi occhi, sta nel senso comprensibile euclideo che attribuisce alla planimetria di Lobacevskij: il sistema corrispondente di geometria solida, dato che non ha significato per lo spazio euclideo, è appena accennato in questo lavoro. In un secondo articolo[33] tuttavia, quasi contemporaneo al primo, passa a considerare la teoria generale della molteplicità a *n*- dimensioni di curvatura negativa costante. Questo articolo è grandemente influenzato dalla dissertazione di Riemann; inizia con la formula dell'elemento lineare e dimostra da essa per prima cosa che la congruenza vale in uno spazio del genere, e successivamente che esso ha, secondo la definizione di Riemann, una curvatura di misura negativa costante. (È istruttivo notare che sia in questo che nel primo *Saggio*, viene attribuita molta importanza alla necessità dell'assioma della congruenza).

Questo lavoro ha un interesse filosofico inferiore al primo, dato che non fa quasi altro che ripetere, in forma generale, i risultati ottenuti nel *Saggio* per le due dimensioni – risultati che, estesi a *n* dimensioni, scendono al livello di semplici costruzioni matematiche. Purtuttavia, il documento è importante sia per la restaurazione della curvatura negativa che era stata trascurata da Helmholtz, sia per il trattamento analitico dei risultati di Lobacevskij – trattamento che, insieme al *Saggio*, restituì infine loro l'importanza che meritavano.

[33] *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, « Annali di matematica », vol. 2, 1808-9. Anche tradotto da J. Houel, *loc. cit.*

Terzo periodo.

30. Il terzo periodo è radicalmente diverso nei metodi e negli scopi, come nelle idee filosofiche sottintese, dal periodo cui subentra. Mentre nel secondo periodo tutto verteva sulla misurazione, con il suo apparato della congruenza, il libero movimento, i corpi rigidi e il resto, tutto ciò svanisce completamente nel terzo periodo che, passando all'estremo opposto, considera la quantità come una categoria assolutamente irrilevante della geometria, e fa a meno della congruenza e del metodo della sovrapposizione. Sfortunatamente, le idee di questo periodo non hanno trovato per esponenti dei filosofi come Riemann ed Helmholtz, ma sono state esposte soltanto da tecnici matematici. Inoltre, il cambiamento delle idee fondamentali, che è immenso, non ha portato con sé un cambiamento altrettanto grande del procedimento pratico; perché anche se la quantità spaziale non fa più parte della geometria proiettiva, viene ancora impiegata la quantità ed abbiamo ancora equazioni, trasformazioni algebriche e così via. È possibile che ciò generi confusione, specialmente nella mente dello studente cui sfugge la constatazione che le quantità usate, in quanto le proposizioni sono realmente proiettive, sono semplici denominazioni di punti, e non grandezze spaziali effettive, come nella geometria metrica.

Ciononostante, la differenza fondamentale tra questo periodo e quello precedente salta immediatamente agli occhi di chiunque. Mentre Riemann ed Helmholtz trattavano concetti metrici, e prendevano come loro fondamento la misura della curvatura e la formula dell'elemento lineare, – entrambe puramente metriche – il nuovo metodo è basato sulle formule di trasformazione delle coordinate necessarie ad esprimere una data colinearità. Inizia riducendo tutte le cosiddette nozioni metriche – distanze, angoli, etc. – alla forma proiettiva, e da tale trasformazione ottiene un'unità e semplicità metodologica prima impossibile. Tuttavia la trasformazione dipende, tranne quando la costante spaziale è negativa, da figure immaginarie – in Euclide, i punti circolari all'infinito; inoltre, è puramente simbolica ed analitica, e deve essere considerata filosoficamente poco importante. Poiché la questione relativa all'importanza di tale trasformazione è fondamentale ed essenziale per la nostra teoria della geometria, e poiché Cayley, nella prolusione presidenziale alla Associazione Britannica nel 1883

ha sfidato formalmente i filosofi a discutere l'uso degli immaginari dalla quale dipende, tratterò questa questione piuttosto diffusamente. Ma prima, vediamo come viene effettuata la trasformazione dal punto di vista matematico.

31. In tutto questo periodo troveremo che quasi tutte le proposizioni importanti, anche se possono ingannare nella interpretazione ovvia, tuttavia, se vengono giustamente interpretate, hanno un ampio significato filosofico. È così per il lavoro di Cayley, il pioniere del metodo proiettivo.

La formula proiettiva per gli angoli nella geometria euclidea venne ottenuta per la prima volta nel 1853 da Laguerre. La formula tuttavia aveva un carattere perfettamente euclideo, e fu lasciato a Cayley di generalizzarla in modo da comprendere sia gli angoli che le distanze, nei sistemi euclidei come in quelli non euclidei.[34]

Cayley fu fino all'ultimo, un accanito sostenitore dello *spazio* euclideo, anche se riteneva che potessero applicarsi *geometrie* non euclidee allo spazio euclideo, variando la definizione della distanza.[35] Ha fornito così, a dispetto della sua ortodossia euclidea, a coloro che credevano nella possibilità di spazi non euclidei, una delle armi più potenti di cui dispongono. Nel suo *Sesto memoriale sui Quantici* (1859) si prefigge il compito di « stabilire la nozione della distanza in base a principî puramente descrittivi ». Dimostrò che riguardo alla nozione ordinaria della distanza, questa può venire resa proiettiva facendo riferimento ai punti circolari e alla linea all'infinito, e che lo stesso vale per gli angoli.[36] Non contento di ciò, suggerì una nuova definizione della distanza, come l'opposto del seno o coseno di una data funzione delle coordinate; con questa definizione, le proprietà normalmente note come metriche diventano proprietà proiettive, facendo riferimento a una certa conica, che Cayley chiama l'Assoluto. (I punti circolari, analiticamente, sono una conica degenerata, cosicché la geometria ordinaria rappresenta un caso particolare di quanto sopra). Dimostra che quando l'Assoluto è una conica *immaginaria*, la geometria così ottenuta per due dimensioni è una geometria sferica. La corrispondenza con Lobacevskij, nel

[34] V. Klein, *Nicht Euklid*, I, p. 47 ss. e i riferimenti ivi citati.
[35] V. citazione seguente, dalla sua prolusione alla British Association.
[36] Confronta la frase di apertura, dovuta a Cayley, di *Curve di un piano più elevato* di Salmon.

caso in cui l'Assoluto sia *reale*, non viene sviluppata: in effetti non si trova, in tutta l'opera, traccia che si conoscano sistemi non euclidei. Per Cayley, l'importanza del memoriale sta interamente nella sua dimostrazione che la geometria metrica è solamente un ramo della geometria descrittiva.

32. Il rapporto della Teoria della Distanza di Cayley con la metageometria venne indicato per la prima volta da Klein.[37] Klein dimostrò in dettaglio che quando l'Assoluto è reale, abbiamo il sistema (iperbolico) di Lobacevskij; quando è immaginario, abbiamo o la geometria sferica o un nuovo sistema, analogo a quello di Helmholtz, che Klein definisce ellittico; quando l'Assoluto consiste in una coppia di punti immaginari, abbiamo la geometria parabolica, e se in particolare la coppia di punti consiste di punti circolari, abbiamo il normale Euclide. Nella geometria ellittica, due linee rette sullo stesso piano si incontrano soltanto in un punto, non in due come nel sistema di Helmholtz. La distinzione tra i due tipi di geometria è difficile, e verrà discussa più avanti.

33. Dato che questi sistemi sono tutti ottenuti dal piano euclideo, con una semplice alterazione della definizione della distanza, Cayley e Klein tendono a considerare l'intera questione come riguardante non la natura dello spazio, ma la definizione della distanza. Poiché questa definizione a loro parere, è assolutamente arbitraria, il problema filosofico si dilegua – lo spazio euclideo rimane padrone indiscusso, e l'unico problema che resta riguarda la convenzione e la convenienza matematica.[38] Questo punto di vista è stato espresso vigorosamente da Poincaré: « Cosa si deve pensare » dice, « della domanda: È vera la geometria euclidea? È una domanda senza senso ». Gli assiomi geometrici, secondo lui, sono semplici convenzioni: sono « definizioni sotto mentite spoglie ».[39] Così Klein[40] rimprovera a Beltrami di considerare il piano ausiliario come semplicemente ausiliario, e nota che se avesse conosciuto il memoriale di Cayley avrebbe constatato che la relazione tra il piano e la pseudosfera era molto più intima di quanto ritenes-

[37] V. *Nicht Euklid*, I, capp. I e II.

[38] V. p. 9 della prolusione di Cayley alla Brit. Ass. del 1883. Anche una citazione da Klein in *Axiome der Geometrie* di Erdmann, p. 124, nota

[39] « Nature », vol. XLV, p. 407.

[40] *Nicht Euklid*, I, p. 200.

se. Un punto di vista che elimina completamente il problema dall'arena della filosofia, richiede chiaramente ampia discussione. Passeremo adesso a questa discussione.

34. Sembra che il punto di vista in questione sia sorto dalla confusione naturale circa la natura delle coordinate impiegate. Coloro che sostengono questo punto di vista non si sono resi abbastanza conto, ritengo, che le loro coordinate non sono quantità *spaziali* come nella geometria metrica, ma semplici segni convenzionali, con i quali possono venire indicati distintamente punti diversi. Quindi non c'è alcun motivo, dato che abbiamo già la geometria metrica, di considerare una funzione delle coordinate espressione della distanza migliore di un'altra, finché si conserva la perequazione fondamentale dell'addizione.[41] Perciò se le nostre coordinate sono considerate adeguate a tutta la geometria, sorge una indeterminazione nell'espressione della distanza, che può essere evitata soltanto con una convenzione. Ma le coordinate proiettive – così sosterrà la nostra argomentazione – anche se sono perfettamente adeguate a tutte le proprietà proiettive, e completamente libere da ogni presupposto metrico, sono inadeguate per esprimere le proprietà metriche, proprio perché non hanno nessun presupposto metrico. Così, per quanto riguarda le proprietà metriche, Beltrami rimane giustificato nei confronti di Klein; la riduzione delle proprietà metriche in proiettive è soltanto apparente, anche se l'indipendenza di queste ultime nei confronti della geometria metrica è perfettamente reale.

35. Ma cosa sono le coordinate proiettive e come vengono introdotte? Questa questione non venne ripresa nel memoriale di Cayley, e quindi parve che l'uso delle coordinate per definire la distanza comportasse un errore logico. Perché le coordinate, in tutti i sistemi precedenti, erano state dedotte dalla distanza, e usare un qualsiasi sistema esistente di coordinate per definire la distanza, conseguentemente, significava entrare in un circolo vizioso. Cayley accenna a questa difficoltà in una nota, dove tuttavia egli osserva soltanto che aveva considerato le coordinate come numeri assegnati arbitrariamente ai diversi punti, in base a un sistema non ulteriormente accertato. L'inconveniente è stato trattato diffusamente da Sir R. Ball (*Teoria del Contenuto*, trad. R.I.A. 1889), che sostiene

[41] Cioè l'equazione $AB + BC = AC$ per tre punti su una linea retta.

che se i valori delle nostre coordinate comportano già l'usuale misurazione della distanza, il darne una nuova definizione mantenendo le coordinate normali, significa incorrere in contraddizione. Egli afferma (*op. cit.*, p. 1): « Nello studio della geometria non euclidea ho spesso sentito un disagio che so essere stato condiviso da altri. In quella teoria, sembra quasi che si cerchi di sostituire la nostra nozione normale della distanza tra due punti, col logaritmo di un dato rapporto disarmonico.[42] Ma questo rapporto comporta in sé la nozione di distanza misurata nel modo normale. Allora, come possiamo sostituire la vecchia nozione di distanza con la nozione non euclidea, finché la definizione stessa della seconda comporta la prima? ».

36. Questa obbiezione è valida, dobbiamo ammetterlo, finché il rapporto disarmonico viene definito nella solita maniera metrica. Sarebbe valida, per esempio, contro ogni tentativo di fondare una nuova definizione della distanza sul resoconto di Cremona circa il rapporto disarmonico,[43] nel quale essa appare come una proprietà metrica che rimane inalterata dopo la trasformazione proiettiva. Se si deve evitare un errore logico, in effetti, ogni riferimento a grandezze spaziali di qualsiasi genere si deve evitare anche; perché tutte le grandezze spaziali, come verrà dimostrato in seguito,[44] dipendono logicamente dalla grandezza fondamentale della distanza. Il rapporto disarmonico e le coordinate devono venire definiti egualmente secondo proprietà puramente descrittive, se l'uso che se ne fa in seguito deve risultare scevro da presupposti metrici, e quindi dall'obbiezione di Sir R. Ball.

Una tale definizione è stata offerta soddisfacentemente da Klein,[45] che a questo scopo si rifà alla costruzione quadrilatera[46] di von Standt. Con questa costruzione, che ho riprodotto schematicamente nel terzo capitolo, sezione A, par. 112 e seguenti, otteniamo una illustrazione puramente descrittiva del rapporto armonico e disarmonico, e, data una coppia di punti, possiamo ottenere il coniugato armonico di qualsiasi altro punto sulla stessa linea retta. L'introduzione delle coordinate proiettive è basata su questa costruzione. Partendo da tre punti qualsiasi su una linea retta, assegnamo loro arbitrariamente i numeri 0, 1, ∞. Poi troviamo il coniugato armonico del primo rispetto a 1, ∞, e assegniamo ad esso il numero 2. Lo scopo di assegnare questo numero piuttosto che qualsiasi altro, è quello di ottenere il valore — 1 del rapporto disarmonico dei quattro numeri corrispondenti ai quattro punti.[47] Quindi troviamo il coniugato armonico del punto 1 rispetto a 2, ∞ ed assegniamo ad esso il numero 3; e così via. Klein ha dimostrato che con questa costruzione possiamo ottenere qualsiasi numero di punti, e possiamo costruire un punto corrispondente a qualsiasi numero dato, frazionario o negativo. Inoltre, quando due gruppi di quattro punti hanno lo stesso rapporto disarmonico, definito descrittivamente,[48] i numeri corrispondenti hanno anch'essi lo stesso rapporto disarmonico. Introducendo un sistema numerico del genere su due linee rette, o su tre, otteniamo le coordinate di qualsiasi punto su un piano o nello spazio. Con questa costruzione, che è di fondamentale importanza per la geometria proiettiva, l'errore logico sul quale Sir R. Ball basa la sua critica viene soddisfacentemente evitato. Le nostre coordinate vengono introdotte con un metodo puramente descrittivo, e non comportano nessun presupposto circa la misurazione della distanza.

37. Quindi, con questo sistema di coordinate, definire la distanza come una certa funzione delle coordinate non ci farà incorrere in un circolo vizioso. Ma non ne consegue assolutamente che la definizione della distanza sia arbitraria. Ogni riferimento alla distanza è stato finora escluso, per evitare concetti metrici; ma quando viene introdotta la distanza, riappaiono inevitabilmente i concetti metrici, e dobbiamo ricordare che le nostre coordinate non danno nessuna informazione, *prima facie*, circa alcuno di questi concetti metrici. Naturalmente sta a noi, se lo vogliamo, continuare a escludere la distanza nel senso ordinario, come quantità di una linea retta finita, e definire la *parola* distanza in qualsiasi modo preferiamo. Ma il concetto, che ha indicato finora la parola, richiederà allora un nome nuovo, e l'unico risultato sarà una confusione tra il significato

[42] La formula sostituita da Klein all'inverso del seno o coseno di Cayley. Esse sono equivalenti, ma quella di Klein è matematicamente la più conveniente.

[43] *Elementi di geometria proiettiva*, II ed., Oxford, 1893, cap. IX.

[44] Cap. 3, sez. B.

[45] V. *Nicht Euklid*, I, p. 338, ss.

[46] V. la sua *Geometrie der Lage*, par. 8, « Harmonische Gebilde ».

[47] Il rapporto disarmonico di quattro numeri p, q, r, s viene definito come: $(p-q), (r-s)/(p-r), (q-s)$.

[48] Cioè trasformabili l'una nell'altra per mezzo di una colinearità. V. cap. 3, sez. A, par. 110.

apparente delle nostre proposizioni, per coloro che conservano le associazioni di idee che appartengono al vecchio senso della parola, e il significato *reale*, che risulta dal significato nuovo in cui la parola viene usata.

Ritengo che questa confusione si sia effettivamente verificata nel caso di coloro che considerano la questione tra Euclide e la metageometria come una questione di definizione della distanza. La distanza è una relazione quantitativa, e come tale presuppone l'identità della qualità. Ma la geometria proiettiva tratta solo della qualità – per questa ragione viene detta descrittiva – e non può distinguere tra due figure che sono qualitativamente simili. Ora, il significato della perequazione qualitativa, nella geometria, è quello della possibilità della trasformazione reciproca a mezzo della colinearizzazione.[49] Perciò, qualsiasi coppia di punti sulla stessa linea retta è qualitativamente simile a un'altra; la loro unica relazione qualitativa è la linea retta, che entrambe le coppie hanno in comune; ed è proprio l'identità qualitativa delle relazioni tra le due coppie che rende possibile trattare esaurientemente la differenza fra tali relazioni con la quantità, come differenza di distanza. Ma ove la quantità venga esclusa, due coppie qualsiasi di punti sulla stessa linea retta appaiono come eguali, e anche due gruppi qualsiasi di tre: perché tre punti qualsiasi su una linea retta possono venire proiettivamente trasformati in altri tre qualsiasi. È soltanto con *quattro* punti su una linea che si acquisisce una proprietà proiettiva che li distingue da altri gruppi di quattro, e questa proprietà è il rapporto disarmonico, definito descrittivamente. Il geometra proiettivo, perciò, non vede nessun motivo per dare un nome alla relazione tra due punti, in quanto questa relazione rappresenti qualcosa che vada oltre la linea retta illimitata sulla quale giacciono; e quando introduce la nozione di distanza, la definisce nell'unico modo in cui i principî proiettivi gli permettono di definirla, come una relazione tra *quattro* punti. Dato che ciononostante egli desidera che la parola gli offra il potere di distinguere tra differenti *coppie* di punti, conviene di prendere due dei quattro punti stabiliti. In questo modo, le uniche variabili nella distanza sono i due punti rimanenti, e la distanza appare perciò come una funzione di *due* variabili, cioè le coordinate dei due punti variabili. Quando avremo definito oltre la nostra funzione cosicché la distanza diventa un elemento addizionabile, abbiamo una funzione con molte delle proprietà della distanza nel senso ordinario. Perciò la geometria proiettiva considera questa funzione come l'unica definizione appropriata della distanza.

[49] V. cap. 3, sez. A.

In effetti possiamo vedere, dal modo in cui sono state introdotte le nostre coordinate proiettive, che *qualche* funzione di quelle coordinate deve esprimere la distanza nel senso ordinario. Perché sono state introdotte serialmente, cosicché, come procediamo dal punto zero verso l'infinito, le coordinate continuano a crescere. A ciascun punto corrisponde una determinata coordinata: quindi, alla distanza tra due punti variabili, quale funzione che non dipende da nessun'altra variabile, deve corrispondere una qualche determinata funzione delle coordinate, dato che anch'esse sono funzioni dei punti cui si riferiscono. Perciò la funzione sopra discussa includerà certamente la distanza nel senso ordinario.

Ma la natura arbitraria e convenzionale della distanza, sostenuta da Poincaré e Klein, è dovuta al fatto che i due punti fissi, necessari per determinare la distanza nel senso proiettivo, possono venire scelti arbitrariamente, e nonostante che, una volta fatta la nostra scelta, due punti qualsiasi avranno una determinata distanza, pure, secondo quale sarà quella scelta, la distanza diventerà una funzione diversa dei due punti variabili. L'ambiguità così introdotta è inevitabile in base ai principî proiettivi; ma dobbiamo concludere da ciò che è realmente inevitabile? Non dovremmo piuttosto concludere che la geometria proiettiva non è in grado di trattare adeguatamente la distanza? Se A, B e C sono tre punti diversi su una linea, deve esserci *qualche* differenza nella relazione tra A e B e tra A e C, perché altrimenti, a motivo della identità qualitativa di tutti i punti, B e C non potrebbero venire distinti. Ma tale differenza comporta una relazione tra A e B, che è indipendente dagli altri punti della linea; perché se non sussisterà questa relazione, gli altri punti non potranno venir distinti come differenti. Perciò, prima di poter distinguere i due punti stabiliti da cui parte la definizione proiettiva, dobbiamo già supporre qualche relazione tra due punti qualsiasi sulla nostra linea, per la quale siano indipendenti da altri punti, e questa relazione è la distanza nel senso ordinario.[50] Quando avremo

[50] Da questo consegue che la riduzione delle proprietà da metriche in proiettive, anche quando l'Assoluto è reale, come nella geometria iperbolica, è soltanto apparente, ed ha validità puramente tecnica.

misurato questa relazione quantitativa con i metodi normali della geometria metrica, potremo procedere a stabilire quali punti base si dovranno scegliere, sulla linea, affinché la funzione proiettiva discussa sopra possa avere lo stesso valore della distanza ordinaria. Ma la scelta di tali punti base, quando discutiamo la distanza nel senso ordinario, non è arbitraria, e la loro introduzione è soltanto un accorgimento tecnico. La distanza nel senso ordinario rimane una relazione tra due punti, non tra *quattro* ed è la mancata percezione che il senso proiettivo differisce e non può sostituire il senso ordinario, che ha dato origine ai punti di vista di Klein e di Poincaré. È questione non di convenzioni, ma delle irriducibili proprietà metriche dello spazio. Per riassumere: le quantità usate nella geometria proiettiva non indicano grandezze spaziali, ma sono simboli convenzionali di relazioni spaziali puramente qualitative. Tuttavia la distanza, in quanto quantità, presuppone l'identità della qualità come condizione del confronto quantitativo. La distanza nel senso ordinario è in breve, quella relazione quantitativa tra due punti su una linea, secondo la quale può venire definita la loro differenza da altri punti. La definizione proiettiva, tuttavia, non essendo in grado di distinguere un gruppo di meno di quattro punti da un altro sulla stessa linea retta, fa dipendere la distanza da due altri punti oltre quelli di cui definisce la relazione. Quindi non resta alcun nome per la distanza in senso ordinario, e molti geometri proiettivi avendone abolito il nome, credono che sia stata abolita la cosa in sé, e sono inclini a negare anche che esista una relazione unica tra *due* punti. Questa confusione nella geometria proiettiva dimostra l'importanza di un nome e dovrebbe indurci ad esser cauti nel lasciare che nuovi significati oscurino una delle proprietà fondamentali dello spazio.

38. Rimane da discutere il modo in cui le geometrie non euclidee risultano dalla definizione proiettiva della distanza, ed anche la vera interpretazione da dare a questo aspetto della metageometria. Si deve notare che i metodi proiettivi che seguono Cayley trattano sempre di un piano euclideo, nel quale introducono una misura diversa della distanza. Proviene da ciò, comunque si interpretino questi metodi, l'apparente subordinazione degli spazi non euclidei, come se fossero meno autosufficienti di quello di Euclide. Tale subordinazione non è intesa in ciò che segue; al contrario, la correlazione con lo spazio euclideo è considerata valida, primo, perché lo spazio euclideo

è stato studiato più a lungo ed è più familiare, ma secondariamente perché tale correlazione dimostra, quando sia correttamente interpretata, che gli altri spazi sono auto-sufficienti. Nel discutere questa interpretazione possiamo limitarci principalmente alle distanze misurate lungo un'unica linea retta. Ma dobbiamo stare attenti a tener presente che la definizione metrica della distanza – che secondo il punto di vista sostenuto qui è l'unica definizione adeguata – è la stessa negli spazi euclidei e non euclidei; prendere le sue parti non significa quindi prendere le parti di Euclide.

Lo schema proiettivo delle coordinate consiste in una serie di numeri, ciascuno dei quali rappresenta un determinato rapporto disarmonico e indica un punto e uno solo, che aumentano uniformemente con la distanza da un'origine stabilita, finché diventano infiniti quando raggiungono un certo punto. Ora, Cayley ha dimostrato che nella geometria euclidea la distanza può venire espressa come il limite tra il logaritmo del rapporto disarmonico dei due punti e i punti (coincidenti) all'infinito sulla linea retta; mentre, se supponiamo che i punti all'infinito sono distinti, otteniamo la formula della distanza nella geometria iperbolica o sferica, secondo che tali punti siano reali o immaginarî. Ne consegue perciò che con la definizione proiettiva della distanza, otterremo esattamente le formule della geometria iperbolica, parabolica o sferica, secondo che sceglieremo il punto cui viene attribuito il valore $+\infty$ a una distanza (nel senso ordinario) finita, infinita o immaginaria dal punto cui assegniamo il valore 0. La nostra linea retta rimane nel frattempo, una ordinaria linea retta euclidea. Ma abbiamo visto che la definizione proiettiva della distanza si adatta alla vera definizione solo quando i due punti stabiliti cui si riferisce sono opportunamente scelti. Ora, il significato ordinario della distanza è necessario alle geometrie euclidee e non euclidee – in effetti, è solo nelle proprietà metriche che differiscono tali geometrie. Perciò la nostra linea retta *euclidea* anche se può servire ad illustrare altre geometrie diverse da quella di Euclide, può venire trattata correttamente soltanto con Euclide. Quando diamo una definizione della distanza diversa da quella di Euclide, siamo ancora entro il dominio delle proprietà puramente proiettive, e non traiamo nessuna informazione circa le proprietà metriche della nostra linea retta. Ma l'importanza di questa nuova interpretazione per la metageometria, sta nel fatto che, avendo stabilito indipendentemen-

te le formule metriche degli spazi non euclidei, troviamo, come nel saggio di Beltrami, che tali spazi possono essere messi in relazione, secondo una corrispondenza omografica, con i punti dello spazio euclideo; e che ciò può esser fatto in modo tale da fornire, per la distanza tra due punti del nostro spazio non euclideo, la misura iperbolica o sferica della distanza per i punti corrispondenti dello spazio euclideo.

39. Nell'insieme quindi, pare che la tesi più sostenibile sia una modifica del punto di vista di Sir R. Ball, che praticamente è una esposizione generalizzata del metodo di Beltrami. Egli immagina qualcosa che con Grassmann definisce un Contenuto, cioè un molteplice generico a tre dimensioni, e poi ne collega gli elementi, uno ad uno, con i punti dello spazio euclideo. Così ogni elemento del Contenuto, come sue coordinate, acquisisce le normali coordinate euclidee del punto corrispondente nello spazio euclideo. Tramite questa correlazione i nostri calcoli, anche se si riferiscono al Contenuto, si svolgono, come nel saggio di Beltrami, nello spazio normale euclideo. Così scompare la confusione, ma con essa scompare anche la supposta interpretazione euclidea. Il Contenuto di Sir R. Ball, se sarà comunque uno spazio, deve essere uno spazio radicalmente diverso da quello di Euclide; [51] parlare come fa Klein, di piani normali con misure della distanza iperboliche o ellittiche, significa cadere in contraddizione oppure rinunziare a qualsiasi significato metrico della distanza. Invece dei piani ordinarî, abbiamo superfici come quelle di Beltrami, di misura di curvatura costante; invece dello spazio di Euclide, abbiamo lo spazio iperbolico o sferico. Nello stesso tempo, rimane vero che con il metodo di Klein, possiamo dare un significato euclideo ad ogni proposizione simbolica della geometria non euclidea. Perché sostituendo alla distanza il logaritmo cui si allude sopra, dal risultato non euclideo passiamo a un risultato che deriva dagli assiomi ordinari euclidei. Questa corrispondenza elimina una volta per tutte, la possibilità di una contraddizione recondita nella metageometria, dato che, ad una proposizione nell'una corrisponde una e una sola proposizione nell'altra, e

[51] Sir R. Ball non ritiene il suo Contenuto non euclideo uno spazio possibile (v. *op. cit.*, p. 131). Su questo punto importante non sono d'accordo con la sua interpretazione, e ritengo tale Contenuto uno spazio possibile quanto quello di Euclide, *a priori*, e forse effettivamente vero entro il margine dovuto agli errori di osservazione.

quindi a risultati contradittori in un sistema, corrisponderebbero risultati contraddittori nell'altro. Perciò, la metageometria non può condurre a contraddizioni, a meno che allo stesso tempo non conduca a contraddizioni corrispondenti la geometria euclidea. E così il piano euclideo con una misura della distanza iperbolica o ellittica, anche se è contradditorio o non metrico come nozione indipendente, è di moltissima utilità quale coadiuvante nell'interpretazione dei risultati non euclidei.

40. Dobbiamo ancora discutere il terzo tipo di geometria non euclidea di Klein, che egli chiama ellittica. La differenza tra questa e la geometria sferica è difficile da afferrare, ma si può illustrare con un semplice esempio. Un piano, come tutti sanno, può venire avvolto senza tirare su un cilindro, e le linee rette del piano, con questa operazione, diventano geodetiche del cilindro. Le geometrie del piano e del cilindro hanno quindi molto in comune. Ma dato che la circonferenza generatrice del cilindro, che è una delle sue geodetiche, è finita, viene usata solo una parte del piano, per avvolgerlo una sola volta attorno al cilindro. Perciò se tentiamo di stabilire una corrispondenza punto per punto tra il piano e il cilindro, troveremo una serie infinita di punti sul piano per un unico punto sul cilindro. Avviene così che le geodetiche, anche se sul piano hanno un solo punto in comune, sul cilindro possono avere un numero infinito di intersezioni.

Ma il metodo di Klein può dimostrare soltanto che la geometria ellittica vale per il piano euclideo normale adottando una misurazione ellittica della distanza. Klein ha fatto grandi sforzi per sottolineare la distinzione tra la geometria [52] sferica ed ellittica, ma non risulta immediatamente evidente che quest'ultima, separata dalla prima, sia valida.

In primo luogo, la geometria ellittica di Klein, che si presenta come un'alternativa dei sistemi metrici su un piano euclideo o in uno spazio euclideo, non è in se stessa sufficiente, se la discussione precedente è giusta, a dimostrare la possibilità di uno spazio ellittico, cioè di uno spazio che corrisponde punto per punto allo spazio euclideo, che abbia quale normale distanza tra due dei suoi punti, la definizione ellittica della distanza tra i punti corrispondenti dello spazio euclideo. Per dimostrare questa possibilità, dobbiamo adottare il metodo

[52] V. *Nicht Euklid*, I, p. 97 ss. e p. 292 ss.

diretto di Newcomb (« Crelle's Journal », vol. 83). Ora, in primo luogo, Newcomb non ha dimostrato che i suoi postulati sono coerenti a sé stessi; ha solo mancato di dimostrare che sono contraddittori.[53] Questo lascerebbe lo spazio ellittico nella stessa situazione in cui Lobacevskij e Bolyay lasciarono lo spazio iperbolico. Ma a prima vista, nello spazio ellittico a *due* dimensioni, pare vi sia inoltre una contraddizione certa. Per spiegare ciò, comunque, sarà necessario qualche cenno sulle particolarità del piano ellittico.

Il piano ellittico, considerato come una figura dello spazio ellittico a tre dimensioni, è ciò che viene definito una superficie doppia[54] cioè come dice Newcomb (*loc. cit.* p. 298): « I

[53] Newcomb dice (*op. cit.*, p. 293): « Il sistema qui formulato è basato sui tre postulati seguenti.

1. Suppongo che lo spazio sia triplicemente esteso, illimitato, senza proprietà che dipendano dalla posizione o dalla direzione, e che possieda una piattezza tale in ogni sua minima parte che sia i postulati della geometria euclidea che i nostri comuni concetti delle relazioni tra le parti dello spazio, siano validi per ogni regione indefinitamente piccola dello spazio.
2. Suppongo che questo spazio sia soggetto a una curvatura tale che una linea retta ritornerà sempre su se stessa al termine di una distanza reale e finita $2D$, senza perdere in nessuna parte del percorso quella simmetria rispetto allo spazio da ogni lato di essa, che costituisce la proprietà fondamentale del concetto che ne abbiamo.
3. Suppongo che se due linee rette partono da uno stesso punto formando un angolo α indefinitamente piccolo una con l'altra, la distanza tra loro alla distanza r dal punto di intersezione sarà data dall'equazione

$$S = \frac{2aD}{\pi} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{2D}.$$

« La linea retta così ha questa proprietà in comune con la linea retta euclidea: che due linee del genere si intersecano soltanto in un unico punto. È possibile che il numero di punti in cui due di tali linee si possono intersecare possa venire determinato dalle leggi della curvatura, ma, non essendo in grado di determinarlo, suppongo quale postulato la proprietà fondamentale della linea retta euclidea ».

È chiaro che in mancanza della determinazione di cui si parla, la possibilità dello spazio ellittico non viene determinata. Può essere possibile per esempio, dimostrare che in uno spazio ove esista un massimo per la distanza, vi sarà un numero infinito di linee rette che uniscono due punti di distanza massima. In questo caso, lo spazio ellittico diverrebbe impossibile.

[54] Per una delucidazione su questo termine v. Klein, *Nicht Euklid*, I, p. 99 ss.

due lati di un piano completo non sono distinti come in una superficie euclidea... Se... un essere dovesse muoversi fino a una distanza 2D, al ritorno si troverebbe sulla superficie opposta a quella dalla quale era partito, e dovrebbe ripetere il percorso, per poter tornare alla posizione iniziale, senza abbandonare la superficie ». Ora, se immaginiamo uno spazio ellittico a *due* dimensioni, la distinzione tra i lati di un piano perde di significato, perché essa ha significato solo in riferimento a una terza dimensione. Ciononostante, ci verrebbe imposta una qualche distinzione del genere. Supponiamo, per esempio, di prendere un piccolo cerchio fornito di una freccia, come nella figura, e di far percorrere a questo cerchio un giro attorno all'universo. Allora, il senso della freccia si invertirebbe. Saremmo così obbligati a considerare la nuova posizione distinta dalla prima, il che trasformerebbe il nostro piano in un piano sferico, oppure ad attribuire l'inversione della freccia all'azione di un moto che riporti il nostro cerchio alla posizione iniziale. Si deve notare che nulla tranne un movimento attorno all'universo, potrebbe invertire il senso della freccia. Questa inversione *sembra* rappresenti un'azione dello spazio vuoto, che ci obbliga a considerare i punti, che sotto l'aspetto tri-dimensionale sono coincidenti anche se opposti, come realmente distinti, e così a trasformare il piano ellittico in piano sferico. Ma è il moto, non lo spazio, che in realtà causa il cambiamento, e quindi non si dimostra che il piano ellittico è impossibile. Comunque, la questione non ha grande importanza filosofica.

41. Riguardo alla trasformazione della geometria da metrica in proiettiva, abbiamo ancora un argomento da discutere. Si tratta dell'uso geometrico degli immaginari, a mezzo dei quali, tranne nel caso dello spazio iperbolico, viene effettuata la trasformazione. Ho già sostenuto, su altre basi, che questa trasformazione, nonostante la sua enorme importanza tecnica, e nonostante la completa libertà logica della geometria proiettiva dai concetti metrici, è *puramente* tecnica, e non è filosoficamente valida. Si evidenzierà la stessa conclusione se raccogliamo la sfida di Cayley all'Associazione Britannica, nella sua prolusione presidenziale del 1883.

In questa prolusione, il Professor Cayley dedica la maggior parte del discorso ai sistemi non euclidei. Gli *spazi* non eucli-

dei, egli afferma, gli sembrano errati *a priori*; [55] ma le *geometrie* non euclidee, qui come nelle sue opere matematiche, vengono accettate come derivanti dal cambiamento della definizione della distanza. Questo punto di vista è già stato discusso, e quindi non c'è bisogno di criticarlo oltre in questa sede. Ciò di cui desidero parlare, è la questione che Cayley stesso tratta nell'apertura della sua prolusione, cioè l'uso e il significato geometrico delle quantità immaginarie. Dal modo in cui ne parla, si rende imperativo trattarla piuttosto diffusamente. Perché dice (p. 8-9): « ...La nozione che è l'unica veramente fondamentale (e non potrò mai sottolineare abbastanza questa affermazione), che informa e pervade l'intera nozione dell'analisi e della geometria moderna, [è] quella delle grandezze immaginarie nell'analisi, e dello spazio immaginario (o dello spazio come il *locus in quo* dei punti e delle figure immaginarie) nella geometria: in ogni caso, uso la parola " immaginario " come comprensivo del reale... Anche se si dovesse concludere che la nozione appartiene alla pura tecnica matematica o che si riferisce a delle non-entità riguardo alle quali non è possibile nessuna scienza, ciononostante mi sembra che (quale argomento di discussione filosofica) la nozione non dovrebbe venire perciò ignorata; dovrebbe almeno dimostrarsi che esiste un fondamento per ignorarla ».

42. Ed è questo fondamento che adesso mi propongo di dimostrare. Ma per timore che ai non-matematici sfugga il punto essenziale dell'osservazione di Cayley (che a volte si è ritenuto erroneamente si riferisse agli spazi non euclidei) è bene che io chiarisca fin da principio, che questa questione è totalmente separata e in relazione solo indiretta con la validità o l'importanza della metageometria. Una quantità immaginaria comporta la $\sqrt{-1}$; la sua forma più generale è $a+\sqrt{-1}b$, dove a e b sono reali: Cayley usa la parola « immaginario » in modo da includere il reale, per poter comprendere il caso speciale ove $b = 0$. Sarà opportuno, in ciò che segue, escludere questo più ampio significato, e supporre che b non sia eguale a zero. Un punto immaginario è un punto le cui coordinate comportino la $\sqrt{-1}$, cioè le cui coordinate siano quantità

[55] V. p. 9 del rapporto: « Il mio punto di vista è che il dodicesimo assioma di Euclide nella forma di Playfair, non ha bisogno di dimostrazione, ma fa parte della nostra nozione dello spazio, lo spazio fisico della nostra esperienza, che è la rappresentanzione che si trova al fondo di ogni esperienza esterna ».

immaginarie. Una curva immaginaria è una curva i cui punti sono immaginarî – o in qualche speciale applicazione, una curva la cui equazione contiene dei coefficienti immaginarî. Non è il caso, qui, di discutere le sottigliezze matematiche cui conduce questa nozione; il lettore che vi fosse interessato troverà un'eccellente esposizione elementare delle loro applicazioni geometriche nel *Nicht-Euklid* di Klein, II, p. 38-46. Ma per quanto ci riguarda al momento, possiamo limitarci ai punti immaginarî. Se si troverà che questi hanno importanza puramente tecnica, e sono privi di ogni significato filosofico, allora lo stesso varrà per qualsiasi insieme di punti immaginarî, cioè qualsiasi curva o superficie immaginaria.

Che la nozione dei punti immaginarî sia di suprema importanza nella geometria, verrà constatato da chiunque rifletta che i punti circolari sono immaginarî, e che la trasformazione della geometria da metrica in proiettiva, che è uno dei maggiori risultati conseguiti da Cayley, dipende da questi punti. Ma mi è difficile discutere adeguatamente la loro importanza filosofica, dato che non mi risulta che esista alcuna soddisfacente filosofia degli immaginarî nell'algebra pura. Adotterò quindi l'ipotesi più favorevole, supponendo che contro il loro uso non possa venire addotta con successo nessuna obbiezione. Ritengo che anche in base a questa ipotesi, non si possa trovare nessun motivo per i punti immaginarî in geometria.

In primo luogo, dobbiamo escludere dai punti immaginarî considerati, quelli le cui coordinate sono immaginarie soltanto per certi sistemi speciali di coordinate. Per esempio, se una delle coordinate di un punto è la tangente da questo a una sfera, questa coordinata sarà immaginaria per qualsiasi punto interno alla sfera, tuttavia il punto è perfettamente reale. Quindi si deve definire un punto come immaginario soltanto quando, qualsiasi sistema reale di coordinate adottiamo, una o più delle quantità che esprimono tali coordinate rimangono immaginarie. A questo scopo, è sufficiente, matematicamente, supporre che le nostre coordinate siano cartesiane – un punto le cui coordinate cartesiane sono immaginarie, è un punto veramente immaginario nel senso di cui sopra.

Per discutere il significato di un punto del genere, è necessario che consideriamo sommariamente la natura fondamentale della corrispondenza tra un punto e le sue coordinate.

Ritenendo che la geometria elementare abbia dimostrato – mi sembra in modo soddisfacente – che le relazioni spazia-

li sono suscettibili di misurazione quantitativa, allora un dato punto avrà entro un opportuno sistema di coordinate, in uno spazio a n dimensioni, n relazioni quantitative rispetto alla figura spaziale fissa che rappresenta l'asse delle coordinate, e queste n relazioni quantitative – con date riserve – saranno uniche, cioè nessun altro punto potrà essere determinato dalle stesse quantità. (Per molti sistemi di coordinate possibili, quest'ultima condizione non viene rispettata; ma proprio per quel motivo non sono convenienti e vengono impiegati soltanto per problemi speciali). Così, dato un sistema di coordinate, e data qualsiasi serie di quantità, tali quantità, *se determinano un punto*, lo determinano univocamente. Ma per una estensione naturale del metodo, si lascia cadere la riserva di cui sopra, e si suppone che a *tutte* le serie di quantità debba corrispondere qualche punto. Per questo presupposto, mi pare non esista alcuna parvenza di fondamento. Sarebbe lo stesso che un postino ritenesse che, poiché ciascuna casa di una strada è determinata univocamente dal numero, ci sarà una casa per qualsiasi numero immaginabile. Dobbiamo sapere infatti che una data serie di quantità può rappresentare le coordinate di qualche punto nello spazio, prima che sia legittimo dare un qualsiasi significato spaziale a quelle quantità: e questa conoscenza, ovviamente, non può derivare soltanto da operazioni sulle coordinate, altrimenti si cade in un circolo vizioso. Per tornare all'analogia riportata sopra, dobbiamo conoscere il numero delle case a Piccadilly, prima di sapere se un dato numero ha una casa che gli corrisponde o no; e l'aritmetica da sola, per quanto ingegnosamente impiegata, non ci darà mai questa informazione.

Così la distinzione che è importante non è quella tra le quantità reali e immaginarie, ma tra le quantità a cui corrispondono dei punti e quelle alle quali non corrispondono dei punti. Possiamo concordare convenzionalmente di denotare i punti reali con coordinate immaginarie come nel metodo gaussiano, il punto le cui coordinate normali sono a, b si denota con l'unica quantità $(a + \sqrt{-1}\, b)$. Ma ciò non cambia quello che intende Cayley. Cayley intende dire che è di grande utilità in matematica considerare, come punti aventi esistenza reale nello spazio, i presunti correlativi spaziali di quantità che con il sistema di coordinate impiegato, non hanno correlativi nello spazio quotidiano; e che questa utilità da parte di molti matematici si ritiene indichi la validità di un presupposto

tanto fruttuoso. Per fissarci le idee, consideriamo gli assi cartesiani nello spazio euclideo a tre dimensioni. Appare quindi, all'esame, che un punto può essere situato a qualsiasi distanza alla destra o alla sinistra di uno qualsiasi dei tre piani coordinati. Assumendo questa distanza come coordinata, appare perciò che a tutte le quantità da $-\infty$ a $+\infty$ corrispondono dei punti reali. Lo stesso risulta per le altre due coordinate; e dato che la geometria elementare dimostra che le loro variazioni sono reciprocamente indipendenti, sappiamo che ad ogni gruppo di tre quantità reali corrisponde un punto reale e uno solo. Ma sappiamo anche, poiché seguiamo il metodo fino in fondo, che nel raggio di queste tre quantità variabili è compreso tutto lo spazio, perciò, un nuovo gruppo di quantità quale quello introdotto con l'uso degli immaginari, non possiede correlativo spaziale, e si può supporre che ne possieda uno soltanto per una conveniente finzione.

43. Il fatto che la finzione *sia* conveniente, tuttavia, si può ritenere indichi che è più che una finzione. Ma penso che questo presupposto possa essere facilmente spiegato. Perché tutti gli impieghi fruttuosi degli immaginari in geometria, sono quelli che cominciano e finiscono con quantità reali, e gli immaginarî vengono usati soltanto per i passaggi intermedi. Ora, in tutti questi casi, abbiamo una interpretazione spaziale reale all'inizio e al termine della argomentazione, ove è importante soltanto l'interpretazione spaziale; nei passaggi intermedî, trattiamo in modo puramente algebrico di quantità puramente algebriche, e possiamo eseguire quasiasi operazione che sia algebricamente permessa. Se le quantità che ci ritroviamo alla fine sono passibili di interpretazione spaziale, allora, e soltanto allora, potremo ritenere che il nostro risultato è geometrico. Usare il linguaggio geometrico, in qualsiasi altro caso, è soltanto un conveniente aiuto per l'immaginazione. Parlare, per esempio, delle proprietà proiettive che si riferiscono ai punti circolari, è una pura *memoria tecnica* in relazione a proprietà puramente algebriche; i punti circolari non esistono nello spazio, ma sono delle quantità ausiliarie con le quali vengono trasformate le equazioni geometriche. Non c'è da meravigliarsi che non sorgano contraddizioni dall'interpretazione geometrica degli immaginarî: perché essi vengono interpretati unicamente secondo le regole dell'algebra che possiamo ammettere altrettanto valide se applicate agli immaginarî. Poiché è completamente assente la percezione dello spazio, l'algebra do-

mina suprema, e non può sorgere nessuna incoerenza. Ogni volta che per un attimo lasciamo che facciano capolino le nostre normali nozioni spaziali, sorgono le più madornali assurdità – chiunque può vedere che un cerchio, essendo una curva chiusa, non può diventare infinito. Un metafisico che inventasse qualcosa di tanto assurdo quanto i punti circolari, verrebbe cacciato a fischi. Ma un matematico può farlo impunemente.

Quindi, alla fine, è solo la conoscenza dello spazio e non la conoscenza dell'algebra, che può assicurarci che un qualsiasi gruppo di quantità avrà un correlativo spaziale, e in assenza di un tale correlativo, le operazioni con queste quantità non hanno nessun valore geometrico. È questo il caso degli immaginarî nel senso di Cayley, e il loro uso in geometria, per quanto grandi siano i vantaggi tecnici, e per quanto rigida la validità tecnica, è assolutamente privo di importanza filosofica.

44. Ritengo che adesso abbiamo discusso la maggior parte delle questioni relative al fine e alla validità del metodo proiettivo. Abbiamo visto che è indipendente da ogni presupposto metrico, e che l'uso delle coordinate non comporta la supposizione che esse misurino o esprimano grandezze spaziali. Abbiamo visto che è in grado di trattare, soltanto con i suoi propri metodi, la questione della similitudine qualitativa delle figure geometriche, che è logicamente precedente a qualsiasi comparazione circa la quantità, perché la quantità presuppone la similitudine qualitativa. Abbiamo anche visto che, per quanto se ne estenda l'uso legittimo, esso vale egualmente per tutti gli spazi omogenei, e che il suo criterio di uno spazio indipendentemente possibile — la determinazione di una linea retta per mezzo di due punti [56] – non è soggetto alle qualifiche e limitazioni che appartengono, come abbiamo visto nel caso del cilindro, al criterio metrico della curvatura costante. Ma abbiamo anche visto che, quando la geometria proiettiva cerca di venire alle prese con la grandezza spaziale, e di sottoporre al suo potere la distanza e la misura degli angoli, il suo successo, anche se tecnicamente valido ed importante, filosoficamente è un successo solo apparente. Perciò, se la quantità deve venire applicata comunque allo spazio, la geometria metrica rimane un ramo separato anche se logicamente conseguente della matematica.

[56] L'eccezione a questo assioma, nello spazio sferico, presuppone la geometria metrica, e non distrugge la validità dell'assioma per la geometria proiettiva. V. cap. 3 sez. B, par. 171.

45. Rimangono da dire soltanto poche parole riguardo a *Sophus Lie*. Quale matematico, quale inventore di un nuovo metodo d'analisi immensamente potente, non può mai venire lodato abbastanza. La geometria è soltanto uno dei numerosi argomenti ai quali si applica la sua teoria dei gruppi continui, ma la sua applicazione alla geometria ha apportato una rivoluzione nel metodo, ed ha reso possibile per problemi quali quelli di Helmholtz, un trattamento infinitamente più preciso ed esauriente di qualsiasi altro che fosse possibile prima.

La definizione generale di un gruppo è la seguente: Se abbiamo un numero qualsiasi di variabili indipendenti x_1, $x_2 \ldots x_n$, ed una qualsiasi serie di trasformazioni di queste in nuove variabili — e le trasformazioni sono definite da equazioni di forma specifica, con parametri che variano da una trasformazione all'altra – allora la serie delle trasformazioni forma un *gruppo*, se l'applicazione successiva di due qualsiasi di esse è equivalente ad un solo membro della serie iniziale di trasformazioni. Il gruppo è *continuo* quando possiamo passare per gradazioni infinitesimali entro il gruppo, da una delle trasformazioni all'altra.

Ora, in geometria, il risultato di due movimenti successivi o colinearità di una figura si può sempre ottenere con un unico movimento o colinearità, e ogni movimento o colinearità può essere costituito da una serie di movimenti infinitesimali o colinearità. Inoltre, l'espressione analitica di ciascuno dei due è una data trasformazione delle coordinate di tutti i punti della figura.[57] Da ciò consegue che le trasformazioni che determinano un movimento o una colinearità sono tali da formare un gruppo continuo. Ma la questione dell'equivalenza proiettiva di due figure, alla quale è riducibile tutta la geometria proiettiva, deve essere trattata sempre con una colinearità; e la questione dell'eguaglianza di due figure, alla quale è riducibile tutta la geometria metrica, deve sempre venire determinata da un movimento tale da causare la sovrapposizione; perciò

[57] I matematici della scuola di Lie hanno l'abitudine, che all'inizio crea un po' di confusione, di parlare di movimenti dello spazio invece di movimenti dei corpi, come se lo spazio nel suo insieme potesse muoversi. Tutto ciò che si intende è naturalmente, il movimento equivalente degli assi coordinati, cioè un cambiamento degli assi nel senso usuale elementare.

l'intero argomento della geometria può venire considerato come una teoria dei gruppi continui che definiscono ogni possibile movimento e colinearità.

Ora Sophus Lie ha sviluppato molto diffusamente, la teoria puramente analitica dei gruppi; e con questo metodo di formulazione del problema, è in possesso di un'arma molto potente, pronta per l'attacco. In due articoli « Sui fondamenti della geometria » [58] ai quali si accinse in seguito alle pressanti richieste di Klein, fa delle premesse che corrispondono sommariamente a quelle di Helmholtz, omettendo la monodromia, ed applica la teoria dei gruppi alla deduzione delle loro conseguenze.[59] Egli afferma che è difficile si possa considerare che l'opera di Helmholtz *dimostri* le sue conclusioni, ed in effetti un'analisi più approfondita della teoria di gruppo rivela svariate possibilità ignorate da Helmholtz. Ciononostante, quale pioniere, privo del macchinario di Lie, mi pare che Helmholtz meriti maggiori lodi di quanto Lie è disposto a concedergli.[60]

[58] *Über die Grundlagen der Geometrie*, « Leipziger Berichte », 1890. Il problema di questi due articoli è in realtà metrico, dato che si interessano non alla colinearità in generale, ma ai movimenti. Comunque il problema è trattato col metodo proiettivo, e i movimenti vengono considerati colinearità che lasciano invariato l'Assoluto. Sembrava quindi impossibile discutere il lavoro di Lie, finché non fosse stato dato qualche cenno del metodo proiettivo.

[59] Le premesse di Lie, per essere esatti, sono le seguenti:

Supponiamo che $x_1 = f\ (x, y, z, a_1, a_2 \ldots)$
$x_2 = \varphi\ (x, y, z, a_1, a_2 \ldots)$
$x_3 = \psi\ (x, y, z, a_1, a_2 \ldots)$

producano una famiglia infinita di trasformazioni reali dello spazio, circa la quale formuliamo le seguenti ipotesi:

A. Le funzioni f, φ, ψ sono funzioni *analitiche* di $x, y, z, a_1, a_2 \ldots$

B. Due punti $x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2$ possiedono un'invariante cioè

$$\Omega\ (x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2) = \Omega\ (x'_1 y'_1 z'_1 x'_2 y'_2 z'_2)$$

dove $x'_1 \ldots\ x'_2 \ldots$ sono le coordinate trasformate dei due punti.

C. Libero Movimento: cioè ogni punto può venire spostato in qualsiasi altra posizione; quando un punto rimane fisso qualsiasi altro punto di posizione generica può assumere ∞^2 posizioni; quando rimangono fissi due punti, qualsiasi altro in posizione generica può assumere ∞^1 posizioni; quando i punti fissi sono tre, nessun movimento è possibile – queste limitazioni sono i risultati delle equazioni date dall'invariante Ω.

[60] Su questo punto, Cfr. Klein, *Hobere Geometrie*, Gottingen, 1893, II, p. 225, 244, specialmente pp. 230-1.

Il metodo di Lie è assolutamente esauriente; omettendo la premessa della monodromia, le altre dimostrano che un corpo ha sei gradi di libertà, cioè che il gruppo che fornisce ogni possibile movimento a un corpo avrà sei membri indipendenti: se manteniamo fisso un punto, il numero dei membri indipendenti viene ridotto a tre. Quindi, dalla teoria generale, egli enumera tutti i gruppi che rispettano questa condizione. Affinché un gruppo del genere dia i movimenti possibili, è necessario, per il secondo assioma di Helmholtz, che lasci invariata qualche funzione delle coordinate di due punti qualsiasi. Ciò elimina molti dei gruppi enumerati precedentemente, che egli discute uno ad uno. Giunge così ai seguenti risultati:

I. Se il libero movimento deve avere valore *universale, in due dimensioni* non ci sono gruppi che soddisfino i primi tre assiomi di Helmholtz, tranne quelli che danno i movimenti normali euclidei e non euclidei; ma se deve avere valore soltanto *entro una data regione* c'è ancora un gruppo possibile, nel quale la curva descritta da un punto qualsiasi in una rotazione non è chiusa, ma è una spirale equiangolare. Per escludere questa possibilità è necessario l'assioma della monodromia di Helmholtz.

II. In *tre dimensioni*, i risultati sono ancora più contrari a Helmholtz. Supponendo che il libero movimento valga solo *entro una data regione*, dobbiamo distinguere due casi: *O* che il libero movimento valga, entro quella regione, assolutamente senza eccezione, cioè quando un punto viene tenuto fermo, *tutti* gli altri punti entro quella regione possono muoversi liberamente su una superficie: in questo caso l'assioma della monodromia non è necessario, e i primi tre assiomi sono sufficienti per determinare che il nostro gruppo è quello dei movimenti euclidei e non euclidei. *Oppure*, il libero movimento entro la regione specifica, vale soltanto per tutti i punti in *posizione generica*, mentre i punti di una data retta, quando un punto è fisso, possono muoversi soltanto su quella retta, non su una superficie; in questo caso, sono possibili altri gruppi, che possono venire esclusi soltanto col quarto assioma di Helmholtz.

Adesso che abbiamo enunciato i risultati puramente matematici delle ricerche di Lie, possiamo ritornare alle considerazioni filosofiche, alle quali era ispirato principalmente il lavoro di Helmholtz. Diventa ovvio che non solo le eccezioni entro una data regione, ma anche la limitazione a una data regione dell'assioma del Libero Movimento, sono filosoficamente asso-

lutamente impossibili e inconcepibili. Come può una data linea o una data superficie rappresentare una barriera inattraversabile nello spazio, o avere una mobilità di genere diverso da quella di tutte le altre linee o superfici? In filosofia questa nozione non può venire ammessa neanche per un momento, dato che distrugge il più fondamentale di tutti gli assiomi, l'omogeneità dello spazio. Perciò non solo possiamo, ma dobbiamo accettare l'assioma del Libero Movimento di Helmholtz nel suo significato più ristretto; e così l'assioma della monodromia diventa matematicamente come filosoficamente superfluo. Da un punto di vista filosofico, questo è il più importante dei risultati di Lie.

46. Sono giunto infine al termine della mia storia della metageometria. Il mio scopo non è stato quello di fornire un resoconto esauriente sia pure delle opere importanti sull'argomento – se avessi avuto uno scopo del genere, specialmente nel terzo periodo, Poincaré, Pasch, Cremona, Veronese ed altri che avrei dovuto menzionare, avrebbero di che lamentarsi. Ma io ho cercato soltanto di stabilire, chiaramente per quanto potevo, i principi che hanno operato nei vari periodi, i motivi e i risultati delle successive teorie. Abbiamo visto come il motivo filosofico, dapprima predominante, sia stato gradualmente estromesso dallo spirito puramente matematico e tecnico dei geometri più recenti. Dapprima, ai metageometri parve che screditare l'Estetica Trascendente fosse importante quanto far progredire la loro scienza; ma dalle opere di Cayley, Klein o Lie, nessuno che le legga potrebbe dedurne che Kant sia mai esistito. Tuttavia abbiamo anche visto che mentre svaniva l'interesse *nella* filosofia, aumentava l'interesse *per* la filosofia: man mano che i risultati matematici si scuotevano di dosso le controversie filosofiche, assumevano gradualmente una forma stabile dal cui ulteriore sviluppo possiamo ragionevolmente sperare che deriverà una crescita piuttosto che una trasformazione. Ritengo che lo stesso sviluppo graduale dalla filosofia possa venir rintracciato nell'infanzia di quasi tutti i rami della matematica; quando i motivi filosofici cessano di operare, in generale è segno che lo stadio di incertezza circa le premesse è superato, cosicché il futuro appartiene interamente alla tecnica matematica. Una volta raggiunto questo stadio di stabilità, è tempo che la filosofia prenda a prestito dalla scienza ed accetti le sue premesse definitive, come imposte dalla necessità reale dei fatti o della logica.

47. Ora, nel discutere i sistemi della metageometria, ne abbiamo trovato due tipi, completamente separati e soggetti ad assiomi diversi. Il tipo storicamente precedente, che tratta dei concetti metrici, discute, per cominciare, le condizioni del Libero Movimento che è indispensabile ad ogni misurazione dello spazio. Esso trova l'espressione analitica di queste condizioni nell'esistenza di una costante spaziale, o misura costante della curvatura, che è equivalente all'omogeneità dello spazio. Questo è il suo primo assioma.

Il secondo assioma afferma che lo spazio ha un numero intero finito di dimensioni, cioè in termini metrici, che la posizione di un punto, relativa a qualsiasi altra figura nello spazio, viene determinata univocamente da un numero finito di grandezze spaziali, dette coordinate.

Il terzo assioma della geometria metrica può dirsi, per distinguerlo dall'assioma proiettivo corrispondente, l'assioma della distanza. Esso dice che esiste una sola relazione tra due punti, che può rimanere inalterata nel movimento combinato di entrambi i punti, e che rimane sempre inalterata in qualsiasi movimento del sistema come un solo corpo rigido. Noi chiamiamo questa relazione distanza.

L'enunciazione dei tre assiomi essenziali della geometria metrica che precede, è tratta da Helmholtz, con gli emendamenti di Lie. L'enunciazione degli assiomi dello stesso Lie, riportata prima era stata troppo influenzata dai metodi proiettivi per fornire un'idea storicamente corretta dello spirito del secondo periodo; e l'enunciazione di Helmholtz, d'altra parte, richiede delle modifiche molto notevoli, come ha dimostrato Lie. Spero quindi che il compromesso sopra raggiunto, possa intendersi come un'accettazione delle correzioni di Lie, pur mantenendo lo spirito di Helmholtz.

48. Ma la geometria metrica, anche se storicamente è precedente, logicamente è successiva alla geometria proiettiva. Perché la geometria proiettiva tratta direttamente della similitudine qualitativa che il giudizio della comparazione quantitativa richiede quale base. Ora, i tre assiomi della geometria metrica di cui sopra, come vedremo nel capitolo 3, sez. B, non presuppongono la misurazione, ma sono invece, le condizioni presupposte dalla misurazione. Senza questi assiomi, che sono comuni a tutti e tre gli spazi, la misurazione sarebbe impossibile; grazie ad essi, ed è questo che sostengo, la misurazione è in grado, anche se solo empiricamente, di stabilire approssi-

mativamente quale dei tre spazi vale per il nostro mondo reale. Ma se questi tre assiomi esprimono per sé stessi, non risultati ma condizioni della misurazione, non saranno equivalenti all'enunciazione della eguaglianza qualitativa dalla quale dipende la comparazione quantitativa? E se è così, non dovremo aspettarci di trovare gli stessi assiomi, nella geometria proiettiva, anche se forse sotto una forma diversa?

49. Questa aspettativa non verrà delusa. I tre assiomi di cui sopra, come vedremo in seguito, sono singolarmente e tutti insieme, filosoficamente equivalenti all'omogeneità dello spazio, e ciò è a sua volta equivalente agli assiomi della geometria proiettiva. Gli assiomi della geometria proiettiva, in effetti, possono approssimativamente venire così enunciati:

I. Lo spazio è continuo e divisibile all'infinito: l'estensione zero, che risulta da una divisione infinita, viene chiamata Punto. Tutti i punti sono qualitativamente simili, e distinti dal semplice fatto che giacciono uno al di fuori dell'altro.

II. Due punti qualsiasi determinano una sola figura, la linea retta; due linee rette, come due punti, sono qualitativamente simili, e distinte per il semplice fatto che sono reciprocamente esterne.

III. Tre punti che non siano sulla stessa linea retta determinano una sola figura, il piano, e quattro punti che non si trovino su uno stesso piano determinano una figura a tre dimensioni. Questo processo, per quanto si può vedere *a priori* può venir continuato senza interferire in alcun modo con la possibilità della geometria proiettiva, fino a cinque o fino a n punti. Ma la geometria proiettiva richiede, quale suo assioma, che il processo si arresti con un numero intero positivo di punti, oltre il quale qualsiasi nuovo punto è contenuto nella figura determinata da quelli già dati. Se il processo si arresta a $(n + 1)$ punti, si dirà che il nostro spazio ha n dimensioni.

Questi tre assiomi, si vedrà che sono equivalenti ai tre assiomi della geometria metrica,[61] espressi senza riferimento alla quantità. Troveremo che essi sono deducibili, come prima, dalla omogeneità dello spazio, o ancora più generalmente, dalla possibilità di provare l'esternalismo. Essi appariranno quindi *a priori*, ed indispensabili all'esistenza di qualsiasi geometria e all'esperienza di un mondo esterno come tale.

[61] Il secondo assioma della triade metrica corrisponde al terzo assioma di quella proiettiva, e *vice versa*.

50. Che questi assiomi comportino qualche necessità logica, ritengo possa venire dedotto come probabile anche soltanto dal loro sviluppo storico. Perché i sistemi della metageometria non sono stati elaborati, in generale, affinché aderissero ai fatti con maggiori probabilità del sistema di Euclide; ad eccezione di Zöllner, per esempio, non so di nessuno che abbia considerato la quarta dimensione come necessaria per spiegare i fenomeni. E anche riguardo alla costante spaziale, anche se una *piccola* costante spaziale viene considerata empiricamente possibile, essa di solito non è considerata probabile; e le costanti spaziali finite, con le quali ha egualmente a che fare la metageometria, di solito non sono ritenute neanche possibili, quale spiegazione di fatti empirici.[62] Così dal principio alla fine non si è trattato di una questione di fatto, ma di logica. E questo non fornisce un forte presupposto, che gli assiomi che vengono mantenuti, siano mantenuti perché sono logicamente indispensabili? Se è così, gli assiomi comuni ad Euclide ed alla metageometria saranno *a priori* mentre quelli propri di Euclide saranno empirici. Dopo una critica di alcune teorie diverse della geometria, procederò nei capitoli 3 e 4, a fornire la prova e a discutere le conseguenze di questa tesi, che formerà la parte rimanente della presente opera.

[62] Cfr. Helmholtz, *Wiss. Abh.*, vol. II, p. 640, nota: « Die Bearbeiter der Nicht Euklidischen Geometrie [haben] deren objective Warheit nie behauptet ».

2. RESOCONTO CRITICO DI ALCUNE TEORIE FILOSOFICHE PRECEDENTI DELLA GEOMETRIA

51. Abbiamo tracciato finora lo sviluppo matematico della teoria degli assiomi geometrici, dalla prima rivolta contro Euclide fino ai giorni nostri. Possiamo quindi sperare di avere a nostra disposizione la conoscenza tecnica richiesta per la filosofia che la riguarda.

L'importanza che la geometria ricopre nelle teorie della conoscenza sorte nel passato, è difficile che possa venire esagerata. In Cartesio, troviamo l'intera teoria del metodo dominata dalla geometria analitica, della cui fertilità andava giustamente fiero. In Spinoza, l'enorme influenza della geometria è troppo ovvia perché si debba commentarla. Tra i matematici, la fede di Newton nello spazio assoluto predominò a lungo, ed è ancora responsabile dell'attuale formulazione delle leggi del moto. Contro questa fede da una parte, e contro la teoria dello spazio di Leibniz dall'altra, e non come ha affermato Cairs,[1] contro l'empirismo di Hume, è impostata la chiave di volta della Filosofia Critica, la dottrina kantiana dello spazio. Così la geometria ha avuto sempre importanza essenziale nella teoria della conoscenza.

Ma in una critica delle teorie rappresentative moderne della geometria, che si prefigge d'essere non una storia dell'argomento, ma una introduzione e una difesa dei punti di vista dell'autore, non sarà necessaria nessun'altra antica teoria, tranne quella di Kant.

Le opinioni sviluppate da Kant sull'argomento, vere o false che siano, hanno talmente dominato il pensiero successivo che, venissero accettate o respinte, sembrava fossero egualmente importanti nella formazione delle opinioni e del modo di esporle, di quelle di quasi tutti gli scrittori successivi.

[1] *Filosofia critica di Kant*, vol. I, p. 287.

Kant.

52. In questo capitolo, il mio scopo non è quello di aggiungere qualcosa alla voluminosa letteratura della critica kantiana, ma soltanto di discutere il rapporto tra la metageometria e l'argomento dell'Estetica Trascendentale, e l'aspetto secondo il quale deve essere considerato questo argomento in una discussione sulla geometria.[2] Su questo punto, mi sembra abbiano largamente prevalso parecchie incomprensioni, fra i sostenitori come tra gli avversari, e cercherò se posso, di eliminare queste incomprensioni. Primo: cosa significa la dottrina di Kant per la geometria? Ovviamente, non l'aspetto che è stato attaccato dagli psicologi — l'« officina kantiana », come lo chiama James — per lo meno se può venire separato distintamente dall'aspetto logico. La questione se lo spazio è dato dalla sensazione, o se, come sosteneva Kant, è dato da una intuizione cui non corrisponde alcuna materia esterna, per il momento può venire messa da parte. In effetti, se accettiamo il punto di vista che pare riassuma sommariamente il contenuto della Critica, il punto di vista che tutta la conoscenza certa è autoconoscenza, allora, se si è stabilito che la geometria è apodittica, dovremo rimetterci al punto di vista che lo spazio è soggettivo. Ma anche in quel caso, la questione psicologica potrebbe sorgere soltanto quando fosse risolta la questione epistemologica, e quindi non potrebbe venir presa in considerazione nella ricerca iniziale. La questione che dobbiamo risolvere è per l'esattezza se, o quanto, la geometria sia apodittica, e per il momento dobbiamo soltanto approfondire questa questione, senza temere le conseguenze psicologiche.

53. Ora, su questa questione come su quasi tutte le questioni relative all'Estetica o all'Analitica, il ragionamento di Kant è duplice. Da una parte, egli dice, si sa che la geometria ha una certezza apodittica: perciò lo spazio deve essere *a priori e soggettivo*. D'altra parte, da fondamenti indipendenti dalla geometria, consegue che lo spazio è soggettivo ed *a priori*, perciò la geometria deve avere una certezza apodittica. Queste due argomentazioni non sono chiaramente distinte nell'Estetica, ma ritengo che una piccola analisi le districherà. Così, nella prima edizione, le prime due argomentazioni deduco-

[2] Per una discussione di Kant da un punto di vista meno strettamente matematico, vedi il quarto capitolo.

no l'apriorità dello spazio da basi non geometriche; la terza deduce la certezza apodittica della geometria e sostiene viceversa, che nessun altro punto di vista può essere responsabile di questa certezza; [3] le ultime due argomentazioni sostengono soltanto che lo spazio è un'intuizione, non un concetto. Nella seconda edizione il duplice ragionamento è più chiaro, l'apriorità dello spazio viene dimostrata indipendentemente dalla geometria nella deduzione metafisica, e dedotta dalla certezza della geometria come l'unica sua spiegazione possibile nella deduzione trascendentale. Nei *Prolegomena*, viene impiegata solo la seconda argomentazione, ma nella Critica vengono usate entrambe.

54. Ora, penso che si debba ammettere che la metageometria ha distrutto la legittima discendenza dell'argomentazione dalla geometria allo spazio; non possiamo più affermare, su basi puramente geometriche, la certezza apodittica di Euclide. Ma se la metageometria non ha fatto di più – sè non ha dimostrato ciò che io ritengo che da sola non riesca a dimostrare, che Euclide *non* ha certezza apodittica – allora l'altro ramo dell'argomentazione di Kant mantiene tutta la forza che può mai aver avuto. Lo spazio reale che conosciamo, si può dire, viene ammesso come euclideo e si dimostra senza alcun riferimento alla geometria, che è *a priori*; *perciò* Euclide ha una certezza apodittica, e l'anti-Euclide va condannato. A questo non serve rispondere insistendo, con i metageometri, che i sistemi non euclidei sono *logicamente* coerenti a sé stessi; perché Kant è pronto a controbattere che il ragionamento geometrico, in virtù della nostra intuizione dello spazio, è sintetico e anche se è *a priori*, non può venire sostenuto soltanto dal principio di contraddizione.[4] A meno che i non euclidei possano dimostrare ciò che senz'altro non sono riusciti a dimostrare fino ad ora, che noi possiamo formarci un'*intuizione* degli spazi non euclidei, la posizione di Kant non può venire rovesciata dalla sola metageometria, ma deve essere attaccata, se deve essere attaccata con successo, dal lato puramente filosofico.

[3] Cfr. Vaihinger, *Commentario*, II, pp. 202-265. Anche p. 336 e ss.

[4] Cioè la seconda edizione, p. 39: « So werden auch alle geometrischen Grundsatze, z. B dass in einem Triangel zwei Seiten zusammen grösser sind als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Auschauung, und zwar *a priori* mit apodiktischer Gewissheit abgeleitet ».

55. Per un attacco del genere, si aprono due vie: o invalidiamo i primi due argomenti dell'Estetica, o possiamo criticare dal punto di vista logico in generale la dottrina kantiana dei giudizi sintetici *a priori*, e il loro rapporto con la soggettività. Credo che entrambi questi attacchi potrebbero venir condotti con qualche successo; ma se dobbiamo confutare la certezza apodittica della geometria, è indispensabile l'uno o l'altro, e ritengo che si riscontrerà che entrambi hanno soltanto successo parziale. Sarà mio scopo dimostrare, nel discutere queste due linee di attacco, 1) che la distinzione tra giudizi sintetici ed analitici è insostenibile, e inoltre, che il principio di contraddizione può dare risultati fecondi soltanto sul presupposto che l'esperienza in generale – o per una scienza specifica, qualche particolare ramo dell'esperienza – debbono essere formalmente possibili [5]; 2) che i primi due argomenti dell'Estetica Trascendentale bastano a dimostrare non lo spazio euclideo ma *qualche* forma di esternalismo – che può essere percettivo o intuitivo, ma non semplicemente concettuale – quale necessario presupposto dell'esperienza di un mondo esterno. Nel terzo e nel quarto capitolo sosterrò, quale risultato di queste conclusioni, che gli assiomi che Euclide e la metageometria hanno in comune, coincidono con le proprietà di qualsiasi forma di esternalismo che sono deducibili col principio di contraddizione, dalla possibilità dell'esperienza di un mondo esterno. Si può quindi dire che queste proprietà, anche se non proprio nel senso kantiano, sono proprietà *a priori* dello spazio; e quanto ad esse ritengo che si possa mantenere una posizione kantiana modificata. Ma la questione della natura soggettiva od oggettiva dello spazio può essere lasciata fuori completamente durante il corso di questa discussione, che ne guadagnerà a trattare esclusivamente di punti di vista logici in contrapposizione ad altri psicologici.

56. (1) *La posizione logica di Kant*. La dottrina del giudizio sintetico ed analitico – per lo meno se deve essere considerata la pietra angolare dell'epistemologia – è stata completamente respinta dalla maggior parte dei logici moderni, tanto che qui richiederebbe poca attenzione, se non fosse per il fatto che un kantiano francese entusiasta, M. Renouvier, si è recentemente appellato ad essa, con fede assoluta, proprio sulla

[5] Cfr. la *Logica* di Bradley, libro III, parte I, cap. VI; la *Logica* di Bosanquet, libro I, cap. I, pp. 97-103.

questione della geometria.[6] E si deve ammettere, con M. Renouvier, che se tali giudizi esistessero nel senso kantiano, la geometria non euclidea, che non rivolge nessun appello all'intuizione, non potrebbe dir nulla contro di essi. Quindi, il parere di M. Renouvier, ci obbliga ad esaminare rapidamente gli argomenti contro la dottrina di Kant e a discutere brevemente quale canone logico debba sostituirla.

Ogni giudizio – così afferma la logica moderna – è sia sintetico che analitico: combina le parti in un tutto, ed analizza il tutto nelle sue parti.[7] Se le cose stanno così, la distinzione tra analisi e sintesi, qualsiasi importanza possa avere per la logica pura, non può avere nessun valore per l'epistemologia. Ma si deve notare che questa dottrina, lascia pieno campo al principio della contraddizione: questo criterio, dato che tutti i giudizi, almeno per un aspetto, sono analitici, può applicarsi egualmente a tutti. D'altra parte, il tutto che viene analizzato si deve supporre già dato, prima che le parti possano risultare reciprocamente contraddittorie: perché due parti o attributi, possono essere incompatibili soltanto se messe in relazione in un tutto dato. Così il principio di contraddizione rimane sterile finché non abbiamo dei giudizi e anche delle deduzioni; perché le parti si possono considerare in qualche modo come una deduzione dal tutto, o viceversa. Una volta costruito l'arco della conoscenza, le parti si sostengono una con l'altra, e il principio della contraddizione è la chiave di volta: ma finché l'arco non è costruito, la chiave di volta rimane sospesa per aria, senza sostegno e senza sostenere nulla. In altre parole, si può analizzare la conoscenza una volta che esiste, ma una conoscenza che dovesse superare ogni tratto del cammino contro lo scetticismo critico, non potrebbe mai aver inizio, e non potrebbe mai giungere alla forma arcuata nella quale soltanto può reggersi.

Tuttavia la dottrina di Kant, se è vero, ha lo scopo di ostacolare lo scetticismo critico anche quando potrebbe essere efficace. Alcune proposizioni fondamentali, egli dice, non sono deducibili dalla logica, cioè le loro contraddizioni non sono auto-contraddittorie; esse mettono insieme un soggetto e un predicato che non si può dimostrare abbiano alcun rapporto con nessun procedimento puramente logico, e tuttavia tali giudizi hanno certezza apodittica. Ma quanto a tali giudizi, Kant sta attento a non fidare sulla mera convinzione soggettiva che siano innegabili: egli dimostra, con tutte le precauzioni, che senza di essi l'esperienza sarebbe impossibile. L'esperienza consiste nella combinazione di termini che la logica formale lascia separati, e presuppone quindi alcuni giudizi in base ai quali viene costruita una struttura per mettere insieme quei termini. Senza quei giudizi – così afferma Kant – ogni sintesi ed ogni esperienza sarebbero impossibile. Perciò, se il particolare del ragionamento kantiano è fondato, si potranno ottenere i suoi risultati col principio della contraddizione *più* la possibilità dell'esperienza, come con la sua distinzione del giudizio sintetico ed analitico.

[6] *Philosophie de la Regle et du Compas*, « Année Philosophique », II, pp. 1-66.

[7] Ho enunciato questa teoria dogmaticamente, perché una dimostrazione richiederebbe un intero trattato di logica. Accetto le dimostrazioni fornite da Bradley e Bosanquet, cui potrà riferirsi il lettore.

Oggigiorno, la logica si arroga immediatamente una sfera più ampia e più ristretta di quella concessale da Kant. Più ampia, perché si ritiene in grado di condannare qualsiasi principio o postulato falso; più ristretta perché ritiene che la legge della contraddizione, senza un dato tutto o una data ipotesi, sia impotente, e che due termini, *per se*, anche se possono essere diversi, non possono essere contraddittori, ma acquisiscono questa relazione soltanto combinandosi in un tutto circa il quale si sa qualcosa, o in relazione a un postulato che per qualche ragione debba essere mantenuto. Così, nessun giudizio *per se* è analitico o sintetico, perché la separazione di un giudizio dal suo contesto lo depriva della sua vitalità e lo fa diventare qualcosa che non è un vero giudizio. Tuttavia, nel suo proprio contesto, non è né puramente sintetico né puramente analitico; perché mentre è l'ulteriore determinazione di un dato tutto e così pertanto analitico, comporta anche la comparsa di *nuove* relazioni entro questo tutto, e pertanto è sintetico.

57. Possiamo tuttavia mantenere una distinzione approssimativamente corrispondente all'*a priori* e *a posteriori* kantiano, anche se meno rigida e più soggetta a variazioni secondo il livello di organizzazione della conoscenza. Kant di solito si sforza di dimostrare, come si è notato sopra, che le sue proposizioni sintetiche *a priori* sono presupposti necessari dell'esperienza; ora, nonostante che non possiamo mantenere il termine *sintetico*, possiamo mantenere il termine *a priori* per i presupposti o i postulati dai quali soltanto consegue la possibilità

dell'esperienza. Tutto ciò che può dedursi da tali postulati, senza l'aiuto della materia dell'esperienza, sarà anch'esso naturalmente *a priori*. Dal punto di vista della logica in generale, le leggi del pensiero e le categorie, con le condizioni indispensabili della loro applicabilità, saranno le sole *a priori*; ma dal punto di vista di qualsiasi scienza specifica, possiamo chiamare *a priori* tutto ciò che rende possibile l'esperienza che forma argomento della nostra scienza. Nella geometria, per scendere nel particolare, possiamo chiamare *a priori* tutto ciò che rende possibile l'esperienza dell'esternalismo come tale.

Si deve osservare che questo uso del termine è insieme più razionalistico e meno preciso di quello di Kant. Kant sembra aver supposto di essere direttamente conscio, a mezzo dell'indagine, che qualche conoscenza era apodittica, e quindi la sua materia *a priori*; ma egli non deduceva sempre l'apriorità da qualche principio ulteriore. Tuttavia qui si deve dimostrare, prima di ammettere l'apriorità, che la falsità del giudizio in questione non risentirebbe di un semplice cambiamento della *materia* dell'esperienza, ma solo di un cambiamento che rendesse qualche ramo dell'esperienza formalmente impossibile, cioè inaccessibile ai nostri metodi di conoscenza. L'uso di cui sopra è inoltre meno preciso perché varia secondo la specializzazione dell'esperienza che presupponiamo possibile, e perché ad ogni progresso della conoscenza si stabilisce qualche nuovo rapporto, due giudizi precedentemente isolati vengono portati in relazione logica, e così l'*a priori* può in qualsiasi momento ampliare la propria sfera, mentre si riscontra che si può dedurre di più dai postulati fondamentali.

58. (2) *Gli argomenti di Kant sull'apriorità dello spazio.* Avendo già discusso il canone logico da usare riguardo l'*a priori*, possiamo procedere ad esaminare gli argomenti di Kant riguardo allo spazio. L'argomento basato sulla geometria, come notato sopra, viene rovesciato dalla metageometria, almeno per quanto riguarda le proprietà che appartengono allo spazio euclideo ma non a quelli non euclidei; per quanto riguarda le proprietà comuni a entrambi i tipi di spazio, non possiamo stabilirne l'apriorità finché non abbiamo discusso cosa comporterebbe il negarle, il che verrà fatto nel terzo capitolo. Riguardo ai due argomenti che dimostrano che lo spazio è un'intuizione, e non un concetto, essi richiederebbero molta discussione in una critica specifica di Kant, ma qui possono venire superati con l'osservazione ovvia che lo spazio infinito ed omogeneo euclideo è un concetto, non un'intuizione – un concetto inventato per spiegare un'intuizione, è vero, ma sempre un mero concetto.[8] Ed è questo mero concetto che deve prendersi in considerazione principalmente, in tutte le discussioni di geometria; all'intuizione servirà soltanto di riferirci ove getti luce sulle funzioni o la natura del concetto. Il secondo degli argomenti di Kant, che possiamo immaginare lo spazio vuoto, anche se non l'assenza dello spazio, è falso se significa uno spazio dappertutto senza materia, e irrilevante se significa semplicemente uno spazio tra gli oggetti e considerato come vuoto.[9] L'unico argomento importante, quindi è il primo. Ma devo insistere, fin da adesso, che il nostro problema è puramente logico e che deve essere esclusa per quanto possibile ogni implicazione psicologica. Inoltre, come verrà dimostrato nel quarto capitolo, la funzione propria dello spazio è quella di distinguere tra le diverse cose presentate, non tra l'Io e l'oggetto della sensazione o percezione. L'argomento quindi diventa il seguente: la consapevolezza di un mondo di cose reciprocamente esterne richiede, nella presentazione, un elemento conoscitivo ma non-deduttivo che porta alla discriminazione degli oggetti presentati. Questo elemento deve essere non-deduttivo, perché da qualsiasi numero o combinazione di presentazioni che in sé stesse non comportassero diversità negli oggetti, non potrei mai essere portato a dedurre il reciproco esternalismo di essi. Kant dice: « Affinché le sensazioni possano venire ascritte a qualcosa a me esterno... e similmente affinché io possa essere in grado di presentarle come esterne e al di fuori l'una dall'altra... la presentazione dello spazio deve esistere già ». Ma ciò va un po' troppo lontano: in primo luogo la questione dovrebbe riguardare soltanto il reciproco esternalismo delle cose presentate, non il fatto che siano esterne all'Io; [10] e in secondo luogo, le cose appariranno reciprocamente esterne se mi si presenta una *qualsiasi* forma di esternalismo, euclidea o no. Qualsiasi cosa possa dirsi dello scopo *psicologico* di questo argomento – la cui validità qui non ci interessa – lo scopo *logico* si estende non allo spazio euclideo, ma a qualsiasi forma di esternalismo che potrebbe esistere intuitivamente, e permettere la conoscenza, per esseri che hanno le nostre leggi mentali, di un mondo di cose diverse ma correlate.

[8] Per un'ulteriore discussione di questo punto, v. capp. 3 e 4.
[9] V. cap. 4 per la discussione di questo argomento.
[10] V. cap. 4, p. 185.

Inoltre, per rendere lo scopo dell'argomento interamente logico, all'esternalismo non va lasciato un significato che dipende dai sensi o intuitivo, anche se si deve supporre dato alla percezione o intuizione. In questo argomento, dovrà indicare il fatto della diversità,[11] il fatto di esser diverso da qualche altra cosa; deve comportare la distinzione tra cose diverse, e deve essere l'elemento, nello stato di conoscenza, che ci porta a discriminare le parti che ne costituiscono l'oggetto. Quindi sembrerebbe che risulti questo dall'argomento di Kant, che l'esperienza delle cose diverse ma correlate richiede quale presupposto necessario un qualche elemento dipendente dai sensi o intuitivo, nella percezione, per il quale siamo portati ad attribuire complessità agli oggetti della percezione; [12] che questo elemento preso a sé stante potrebbe definirsi una forma di esternalismo; e che le proprietà di questa forma, se se ne troveranno, che possono venire dedotte dalla mera funzione di rendere possibile l'esperienza della diversità correlata, devono considerarsi *a priori*. Quali siano tali proprietà e in che modo i vari indirizzi dell'argomentazione qui suggerita convergano in un unico risultato, lo vedremo nei capitoli 3 e 4.

59. Nei filosofi che seguirono Kant, la metafisica per la maggior parte predominò talmente sull'epistemologia, che venne aggiunto poco alla teoria della geometria. Ciò che venne aggiunto proveniva indirettamente dall'unico filosofo che si tenne lontano dalle speculazioni puramente ontologiche del suo tempo, cioè Herbart. Le effettive opinioni di Herbart sulla geometria, che si trovano principalmente nella prima sezione della *Synechologia* non sono di grande valore, e non hanno portato nessun frutto importante allo sviluppo dell'argomento. Ma la sua teoria psicologica dello spazio, la costruzione dell'estensione dalle serie di punti, il confronto dello spazio con la serie dei toni e dei colori, la sua preferenza in generale per il discontinuo rispetto al continuo, ed infine la sua fiducia nella grande importanza della classificazione dello spazio con altre forme di serie (*Reihenformen*),[13] diedero origine a molte delle

[11] Qui si intende una diversità di sostanza piuttosto che di attributo; una diversità che potrebbe forse venire definita reale in contrapposizione alla diversità logica.

[12] Questa proposizione verrà confutata diffusamente nel cap. 4.

[13] V. *Psychologie als Wissenschaft*, I, sez. III, cap. VII; II, sez. I, cap. III e sez. II, cap. III. Cfr. anche *Synechologie*, sez. I, capp. II e III.

speculazioni di Riemann che fecero epoca, ed incoraggiarono il tentativo di spiegare la natura dello spazio secondo il suo aspetto analitico e quantitativo soltanto.[14] Attraverso la sua influenza su Riemann, acquisì indirettamente grande importanza nella filosofia geometrica. Adesso dobbiamo ritornare alla dissertazione di Riemann, che abbiamo già discusso negli aspetti matematici prendendo in considerazione questa volta soltanto i punti di vista filosofici.

Riemann.

60. Lo scopo della dissertazione di Riemann, come abbiamo visto nel primo capitolo, era quello di definire lo spazio come una specie del molteplice, cioè come un tipo particolare di un insieme di grandezze. Venne così presupposto, per cominciare, che le figure spaziali potevano venire considerate delle grandezze, e gli assiomi che ne derivavano, conseguentemente, determinavano solo il posto specifico di queste tra le molte varietà di grandezze algebricamente possibili.

La risultante formulazione degli assiomi – mentre dal punto di vista matematico della geometria metrica, era nella quasi totalità pregevole – dal punto di vista della filosofia deve essere ritenuta, a mio parere, una *petitio principii*. Perché quando siamo giunti a considerare le figure spaziali come grandezze, abbiamo già superato la parte più accidentata del percorso. Si vedrà nel terzo capitolo che gli assiomi della geometria metrica – ed è esclusivamente la geometria metrica che viene considerata nel saggio di Riemann – sono divisibili in due classi. Quelli della prima classe — che contiene gli assiomi comuni ad Euclide ed alla metageometria, gli unici assiomi discussi a fondo da Riemann – non sono risultato di misurazione, né di qualsiasi concetto di grandezza, ma sono condizioni da rispettare, prima che la misurazione diventi possibile. Soltanto la seconda classe – quelli che esprimono la differenza tra gli spazi euclidei e non euclidei – può venire dedotta come risultato di misurazione o del concetto di grandezza. Riguardo alla prima classe, tuttavia, vedremo che la relatività della posizione – per cui lo spazio viene distinto da ogni altro molteplice conosciuto, tranne il tempo – porta logicamente alla necessità di tre degli assiomi più caratteristici del-

[14] Riguardo all'influenza di Herbart su Riemann, cfr. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie*, p. 30.

la geometria, eppure tale relatività non può dirsi una deduzione del concetto di grandezza. Nella geometria analitica, a causa del fatto che i sistemi di coordinate partono dai punti e da qui costruiscono linee e superfici, è facile supporre che i punti possano esser dati indipendentemente dalle linee e l'uno dall'altro, e così si perde di vista la relatività della posizione. L'errore così suggerito dei matematici, venne probabilmente alimentato dalla teoria dello spazio di Herbart che per la caratteristica delle serie, come abbiamo visto, gli sembrava ne facilitasse la costruzione da punti successivi, e verso cui Riemann riconosce di essere in debito sia nella Dissertazione che altrove. Lo stesso errore riappare in Helmholtz, nel quale è probabilmente dovuto interamente ai metodi della geometria analitica. È un fatto che colpisce che, in tutti gli scritti di questi due autori, per quanto so, non c'è una sola allusione alla relatività della posizione, quella proprietà dello spazio da cui, come sarà dimostrato nel prossimo capitolo, può venir tratta una ricchissima fonte di conseguenze. Questa non è il risultato di un qualsiasi concetto di grandezza, ma discende dalla natura della nostra intuizione dello spazio; eppur nessuno certamente potrebbe chiamarla empirica, perché è legata alla possibilità stessa di localizzare le cose *qui* come opposte a *là*.

61. In effetti possiamo vedere, da una considerazione puramente logica del giudizio quantitativo, che il modo di Riemann di accostarsi al problema non può mai, con i metodi legittimi, giungere a una formulazione filosoficamente fondata degli assiomi. Perché la quantità è il risultato del raffronto di due oggetti qualitativamente simili, e il giudizio quantitativo trascura completamente l'aspetto qualitativo degli oggetti raffrontati. Perciò, la conoscenza delle proprietà essenziali dello spazio non può mai essere ottenuta da giudizi sulla quantità, che trascurano queste proprietà, mentre pure le presuppongono. È come se si sperasse di conoscere la natura dell'uomo attraverso un censimento. Inoltre, il giudizio sulla quantità è il risultato di un raffronto e perciò presuppone la possibilità del raffronto. Per sapere se, o con quale mezzo è possibile il raffronto, dobbiamo conoscere le qualità delle cose confrontate e del mezzo nel quale il raffronto viene effettuato; mentre per sapere che è possibile un confronto *quantitativo*, dobbiamo sapere che esiste una identità qualitativa tra le cose confrontate, che comporta ancora una precedente conoscenza qualitativa. Una volta che le figure spaziali sono state ridotte a quantità, la

loro qualità è già stata trascurata, come nota e simile alla qualità delle altre figure. Sperare quindi di ottenere le qualità dello spazio da un raffronto della sua espressione come quantità pura con altre quantità pure, è un errore naturale per un geometra analitico, ma un errore, non di meno, dal quale non vi è modo di tornare alla base qualitativa della quantità spaziale.

62. Dobbiamo dissentire completamente, perciò, dalla separazione che sottintende la filosofia dello spazio di Riemann. Egli ritiene che gli assiomi, o debbono essere conseguenze del concetto generale di grandezza, o altrimenti possono essere dimostrati soltanto dall'esperienza (p. 255). Tutto ciò che *può* esser desunto dal concetto generale di grandezza, possiamo replicare, non può essere un attributo *a priori* dello spazio; perché tutti gli attributi necessari dello spazio vengono presupposti in qualsiasi giudizio sulla quantità spaziale, e quindi non possono essere conseguenze di tale giudizio. La separazione di Riemann, conseguentemente, dato che una delle sue alternative è ovviamente impossibile, esige in realtà un interrogativo. Nel formulare gli assiomi della geometria metrica, la domanda dovrebbe essere: Quali assiomi, cioè quali attributi dello spazio devono essere presupposti, perché sia possibile un qualche raffronto quantitativo delle parti dello spazio? E solo quando abbiamo stabilito queste condizioni, che sono aprioristicamente necessarie per qualsiasi conoscenza quantitativa dello spazio, sorge la seconda domanda: quali deduzioni possiamo trarre, circa lo spazio, dai risultati osservati di questa scienza quantitativa, cioè da questa misurazione delle figure spaziali? Le condizioni della misurazione in sé, anche se non sono il risultato di un qualche concetto di grandezza, saranno *a priori* se può essere dimostrato che senza di esse, l'esperienza dell'esternalismo sarebbe impossibile.

Dopo questa riserva iniziale circa la posizione filosofica di Riemann in generale, procediamo ad esaminare in dettaglio, la sua applicazione della nozione di molteplicità.

63. In primo luogo, se non vado errato, c'è una notevole oscurità nella definizione del molteplice, della quale è stata data una interpretazione quasi letterale nel primo capitolo. Per cominciare, cosa si intende per concetto generale passibile di varie determinazioni? Questa proprietà non appartiene a tutti i concetti? Fornisce certamente una base di computo, ma se deve derivarne una quantità continua, dobbiamo senz'altro a-

vere qualche formulazione meno astratta. Per esempio, potrebbe fornire la base per la separazione dei punti nella geometria proiettiva, ma la geometria proiettiva non ha niente a che fare con la quantità. Si è indotti a pensare che quale base di un continuo sia necessario qualcosa di più fluido e flessibile di un concetto. E ancora, cosa si intende con un quanto di molteplice? Nello spazio, la risposta è ovvia: ciò che si intende, è una parte del volume. Ma come la mettiamo per l'altro molteplice continuo di Riemann, il colore? Per un quanto di colore si intenderà un'unica riga dello spettro, o una banda di spessore finito? In ogni caso, quali sono le grandezze da confrontare? E come è necessaria, o perfino possibile la sovrapposizione? Un colore è determinato dalla sua posizione nello spettro: due righe nello stesso spettro non si possono sovrapporre, e due righe in spettri diversi non serve che lo siano – è sufficiente la loro posizione nel rispettivo spettro o anche, approssimativamente, la loro qualità sensoria diretta. Il fatto è che Riemann fin dall'inizio, aveva in mente lo spazio, e molte delle proprietà che egli enuncia come appartenenti a tutti i molteplici, in realtà, appartengono soltanto allo spazio. È tutt'altro che chiaro quali sono le grandezze che le varie determinazioni rendono possibili. E queste grandezze, misurano gli elementi del molteplice, o le relazioni tra gli elementi? Questo è certamente un punto davvero fondamentale, ma è l'unico che Riemann non tocca mai. Nel primo caso, la sovrapposizione di cui parla diventa inutile, dato che la grandezza è inerente all'elemento considerato. Non abbiamo bisogno di sovrapposizioni per misurare quantità corrispondenti a toni diversi di colore; esse possono venire determinate analizzando i toni dei colori separatamente. D'altra parte, rispetto allo spazio, se cerchiamo degli elementi, non ne troveremo nessuno tranne i punti, e nessuna analisi di un punto troverà che la grandezza è inerente ad esso – queste grandezze sono un'invenzione della geometria delle coordinate. Le grandezze delle quali tratta lo spazio, come vedremo nel capitolo 3, sono relazioni tra i punti, ed è per questo motivo che la sovrapposizione è indispensabile alla misurazione dello spazio. Non c'è nessuna qualità inerente per un singolo punto, come c'è per un singolo colore, secondo la quale possa venire quantitativamente distinto da un altro. Così il concetto del molteplice come è definito da Riemann, o non comprende i colori o non comporta la sovrapposizione come l'unico mezzo di misurazione. Da questo dilemma non esiste nessuna via d'uscita.

64. Ma se « la misurazione *consiste* nella sovrapposizione delle grandezze confrontate » (p. 256) non ne consegue direttamente che la misurazione è logicamente possibile *soltanto* quando tale sovrapposizione lascia invariate le grandezze? E che la misurazione perciò, come è definita sopra, comporta quale condizione aprioristica che le grandezze risultino invariate dal moto? Riemann non trae questa conseguenza; in effetti procede direttamente (pp. 256-7) ad esaminare quella che definisce la parte generale della dottrina della grandezza (*Grössenlehre*) indipendentemente dalla misurazione. Ma come è possibile una dottrina della grandezza nella quale le grandezze non possono venire misurate? Il motivo di questa confusione è che la definizione di Riemann della misurazione non è applicabile a nessun molteplice tranne lo spazio, dato che dipende dalla notevole proprietà che ciò che misuriamo nella geometria non sono i punti ma le relazioni tra i punti, e queste ultime, anche se non i primi, possono naturalmente rimanere inalterate dal moto. Cerchiamo, con una esemplificazione, di applicare la definizione di Riemann della misura ai colori. Dobbiamo ricordare che il moto, quando si tratta del molteplice colore, significa – non il moto nello spazio ma – il moto entro il molteplice del colore stesso. Ora, dato che ogni punto del molteplice colore viene determinato completamente da tre grandezze che sono realmente date e non possono venire scelte arbitrariamente, è chiaro che la misurazione per sovrapposizione – comportando, come è in effetti, il moto, e quindi il cammbiamento delle grandezze che lo determinano – è del tutto fuori di questione. La sovrapposizione di un colore all'altro, quale mezzo di misurazione, è una mera assurdità. Eppure la misurazione è possibile nel molteplice colore a mezzo della legge di Helmholtz sulle mescolanze *(Mischungsgesetz)*, ma la misurazione avviene per ogni elemento separato, non per le relazioni tra gli elementi, e così è radicalmente diversa dalla misurazione dello spazio.[15] Gli elementi non sono, come i punti nello spazio, qualitativamente simili, e distinti dal semplice fatto del loro reciproco esternalismo. Ciò che abbiamo, nei co-

[15] Non intendo che la misurazione dei colori venga effettuata senza riferimento alle loro relazioni, dato che ogni misurazione è essenzialmente un paragone. Ma nei colori, sono gli elementi ad essere paragonati, mentre nello spazio, sono le relazioni tra gli elementi.

lori, consiste di tre elementi fondamentali qualitativamente distinti, in base a date proporzioni dei quali, possiamo costruire tutti gli altri elementi del molteplice – mentre ciascuno degli elementi risultanti presenta la stessa combinazione di diversità e di similarità qualitativa dei tre elementi originari. Ma nello spazio, che ce ne faremmo di un procedimento del genere? Dati tre punti, come dovremo combinarli in proporzioni date? La frase è senza significato. Se qualcuno dà l'ovvia risposta che dobbiamo combinare le linee e non i punti, la mia replica è egualmente ovvia. Tanto per cominciare, le linee non sono elementi. Metafisicamente, lo spazio non ha *nessun* elemento, perché, come dimostrerà ciò che segue, è soltanto una relazione tra elementi non spaziali. Matematicamente, questo fatto si dimostra da sé nella nozione auto-contraddittoria del punto, o la grandezza zero nello spazio, quale limite alla nostra vana ricerca di elementi spaziali. Ma anche se lasciamo passare la linea come elemento spaziale, cosa ci darà la combinazione di tre linee in una data proporzione? Ci darà semplicemente le coordinate di *un punto*. Qui notiamo di nuovo una gran differenza tra il molteplice del colore e dello spazio. Nei colori, la combinazione delle grandezze dà una nuova grandezza dello stesso tipo; nello spazio, definisce, non una grandezza, ma un probabile elemento di tipo diverso dalle grandezze che lo determinano. Nel molteplice dei toni, troveremmo condizioni ancora diverse. Qui, nessuna delle grandezze che li determinano può svanire senza che svanisca anche il tono, e tutte e tre sono legate insieme in modo tale, nella percezione unica che ne risulta, che nessuna di esse può esistere senza una quantità finita delle altre. Sono tutte qualitativamente differenti, sia l'una dall'altra che da qualsiasi tono possibile, poiché rappresentano le sue componenti, come la massa e la velocità sono le componenti del momento. Tutte queste componenti richiedono d'essere esaminate prima che un molteplice possa venire completamente definito; e finché non abbiamo condotto un tale esame dettagliato, non possiamo pronunciarci circa la natura empirica o aprioristica delle leggi del molteplice. Per quanto riguarda lo spazio, ho tentato di effettuare tale esame nel terzo e quarto capitolo di questo saggio.

65. Non desidero tuttavia negare il grande valore del concetto dello spazio come un molteplice. Al contrario, questo concetto pare sia diventato indispensabile, comunque si tratti la questione. Desidero soltanto sottolineare che il trattamento

puramente algebrico di qualsiasi molteplice, per quanto possa essere importante per dedurre conseguenze nuove da premesse note, tende a nascondere piuttosto che a chiarire la base delle premesse stesse, ed è quindi ingannevole in una investigazione filosofica. Per la matematica, dove la quantità regna sovrana, il concetto di Riemann si è dimostrato in sé abbondantemente fecondo; per la filosofia, invece, ove la quantità appare piuttosto come un mantello che nasconde le qualità dalle quali si astrae il concetto mi pare produca più errore e confusione che fondata dottrina.

Ci ritroviamo così al punto dal quale siamo partiti, cioè la falsità della separazione iniziale di Riemann, e la conseguente fallacia della sua dimostrazione circa la natura empirica degli assiomi. A mio parere, la sua filosofia è viziata, principalmente, da questa fallacia e dal presupposto acritico che possa venire stabilito un sistema di coordinate metriche indipendentemente da qualsiasi assioma relativo alla misurazione dello spazio.[16] Riemann ha mancato di notare ciò che mi sono sforzato di dimostrare nel capitolo successivo a questo, cioè che a meno che lo spazio non abbia una misura della curvatura rigidamente costante, la geometria diventa impossibile; e inoltre che l'assenza di una misura costante della curvatura comporta una posizione assoluta, il che è assurdo. Da ciò è portato a concludere che tutti gli assiomi geometrici sono empirici, e non possono valere per l'infinitesimale, dove l'osservazione è impossibile. Così, egli dice (p. 267): « Ora i concetti empirici, sui quali sono basate le misurazioni spaziali, i concetti del corpo rigido e del raggio di luce, sembrano perdere di validità nell'infinitesimale; e quindi è da ritenersi che le relazioni tra le grandezze spaziali nell'infinitesimale non corrispondano ai presupposti della geometria, ed in effetti dovremmo presupporlo, dato che ci metterebbe in grado di spiegare i fenomeni più semplicemente ». Devo dissentire completamente da questa conclusione. Negli spazi molto grandi, può esserci un discostamento da Euclide, perché dipendono dall'assioma delle parallele, che non è contenuto nell'assioma del Libero Movimento; ma nell'infinitesimale, i discostamenti da Euclide potrebbero esser dovuti soltanto all'assenza di Libero Movimento, che, come spero dimostrerà il mio terzo capitolo, è assolutamente impossibile.

[16] Per una discussione su questo punto, cfr. cap. 3, sez. B, par. 176.

Helmholtz.

66. Helmholtz, come Riemann, è stato importante sia per la matematica che per la filosofia della geometria. Dal punto di vista matematico, il suo lavoro è stato già preso in considerazione nel primo capitolo; l'esame della sua filosofia, di cui ci occuperemo qui, sarà un compito molto più difficile. Come Riemann, egli si sforzò di dimostrare che tutti gli assiomi sono empirici, e come Riemann, basò la sua dimostrazione principalmente sulla metageometria. Tuttavia, aveva un'ulteriore risorsa nella fisiologia dei sensi, che per prima lo indusse a respingere l'« Estetica Trascendentale », e lo mise in grado di attaccare Kant dal lato psicologico come da quello matematico.[17]

Gli argomenti principali, in una critica di Helmholtz, sono tre: Primo, il suo criterio dell'*a priori*; secondo, la sua controversia con Land, circa l'immaginabilità degli spazi non euclidei; terzo – e questo è di gran lunga il più importante dei tre – la sua teoria della dipendenza della geometria dalla meccanica. Discutiamo successivamente questi tre punti.

67. Il criterio di Helmholtz circa l'apriorità è difficile da scoprire, perché egli, per quanto ne so, non ne dà mai una

[17] I lavori di Helmholtz sulla filosofia geometrica comprendono, in aggiunta agli articoli citati nel primo capitolo, i seguenti articoli: *Ursprung und Sinn der geometrischen Axiome, gegen Land*, « Wiss. Abh. », vol. II, p. 640, 1878 (anche « Mind », vol. III: una risposta a Land su « Mind », vol. II) « Ursprung und Bedeutung der Geometrischen Axiome » 1870, *Vorträge und Reden*, vol. II, p. 1 (anche « Mind », vol. I). Due appendici a Die *Thatsachen in der Wahrnehmung*, intitolate: II, « Der Raum kann trascendental sein, ohne dass es die Axiome sind », e III, « Die Anwendbarkeit der Axiome auf die physische Welt » 1878, *Vorträge und Reden*, vol. II, p. 256 ss.

Le due appendici citate per ultime sono popolarizzazioni e diffusioni dell'articolo su « Mind », vol. III. Quello maggiormente letto, anche se a mio parere il meno pregevole, di tutti gli scritti di Helmholtz sulla geometria, è l'articolo su « Mind », vol. I. Qui sono contenute le famose e molto male interpretate analogie di Pianolandia e Sferolandia, che verranno discusse, e per quanto possibile difese, quando si risponderà all'attacco di Lotze alla metageometria – un attacco basato apparentemente quasi per intero su questo unico articolo popolare. Quindi l'attuale discussione può limitarsi quasi interamente a « Mind », vol. III e alle parti filosofiche dei due scritti citati nel primo capitolo, cioè gli articoli su « Wiss. Abh. », vol. II, pp. 610-60. I suoi altri lavori sono popolari ed importanti solo a motivo del vasto pubblico cui si rivolgono.

definizione precisa. Dalla sua discussione sulla geometria fisica e trascendentale [18] tuttavia, sembra che consideri empirico tutto ciò che si applica alla materia empirica. Perché sostiene che anche se lo spazio fosse una forma *a priori*, pure qualsiasi geometria che intendesse applicarsi alla fisica, sarebbe necessariamente empirica,[19] dato che la posizione effettiva dei corpi non è nota *a priori*. Sembra ancora più probabile che consideri possibile questo criterio, perché esso viene adottato in molti passaggi dal suo allievo Erdmann,[20] ed è difficile che una prova tanto strana possa venire accettata da un filosofo, a meno che non l'abbia trovata nel maestro. L'ho definita una prova strana, perché mi sembra che ignori completamente l'opera sulla filosofia critica. Perché se esiste una cosa che, si potrebbe sperare, sia stata resa sufficientemente chiara dalla Critica di Kant, è che la conoscenza *a priori*, essendo in sé la condizione dell'esperienza possibile, si applica – e dal punto di vista di Kant si applica soltanto – alla materia empirica. Perciò Helmholtz ed Erdmann, nel fornire questa prova senza discuterne, ignorano semplicemente l'esistenza di Kant e la possibilità di un argomento trascendentale. Helmholtz presume sempre che la conoscenza empirica debba essere interamente empirica, che non ci possano essere condizioni *a priori* per l'esperienza in questione, che l'esperienza sarà sempre possibile e possa dare qualsiasi tipo di risultato. Così nel discutere la geometria « fisica » suppone che la possibilità della misurazione empirica non comporti nessun assioma *a priori*, e che nel processo non possa esser contenuto nessun elemento *a priori*. Questa supposizione, come vedremo nel terzo capitolo, non può essere assolutamente giustificata: alcune proprietà dello *spazio* in effetti, sono insite nella possibilità di misurare la *materia*. Perciò, nonostante il fatto che applichiamo la misurazione alla materia empirica, e che i nostri risultati sono quindi empirici, può ben esserci un elemento *a priori* nella misurazione, che è presupposto nella sua possibilità. Questo criterio dunque affermerà che tutto è empirico, ma si deve affermare che esso è senza valore.

È vero che si troverà in Helmholtz anche un altro criterio,

[18] È la risposta a Land, « Mind », vol. III e « Wiss. Abh. », II, p. 640.

[19] V. anche *Die Thatsachen in der Wahrnehmung*, Zusatz II, « Der Raum kann trascendental sein, ohne dass es die Axiome sind ». *Vorträge und Reden*, vol. II.

[20] V. più avanti, critica di Erdmann, par. 81.

migliore, che è stato adottato anche da Erdmann. Tutto ciò che con una esperienza diversa, avrebbe potuto esser reso diverso – così afferma questo criterio – deve in sé dipendere dall'esperienza, e così, essere empirico. Questo criterio pare perfettamente fondato, ma l'uso che ne fa Helmholtz è generalmente viziato dal fatto che trascura di dimostrare la possibilità dell'esperienza diversa in questione. Egli dice, per esempio, che se la nostra esperienza ci mostrasse soltanto corpi che cambiano di forma col moto, noi non giungeremmo all'assioma della congruenza, che di conseguenza dichiara empirico. Ma io cercherò di dimostrare nel terzo capitolo, che senza l'assioma della congruenza, l'esperienza della grandezza spaziale sarebbe impossibile. Se la mia dimostrazione è giusta, ne consegue che nessuna esperienza può mai rivelare grandezze spaziali che contraddicono questo assioma – una possibilità che Helmholtz non discute mai, nel formulare la sua ipotetica esperienza. Così, questo secondo criterio, anche se perfettamente fondato, richiede sempre un'argomentazione trascendentale di accompagnamento, circa le condizioni dell'esperienza possibile. Ma è raro che questo accompagnamento si trovi in Helmholtz.

68. Uno dei pochi casi in cui Helmholtz ha tentato un accompagnamento del genere, si verifica in relazione al nostro secondo punto, l'immaginabilità degli spazi non euclidei. La discussione in proposito venne provocata dagli oppositori kantiani di Helmholtz, che sostenevano che la possibilità semplicemente logica di questi spazi era irrilevante, dato che la base della geometria sta non nella logica ma nell'intuizione. Gli assiomi, dicevano, sono proposizioni sintetiche, e perciò i loro contrari non sono auto-contraddittori; purtuttavia sono proposizioni apodittiche, dato che non ci è possibile nessun'altra intuizione tranne quella euclidea.[21] Ho già criticato questa linea di argomentazione all'inizio del presente capitolo. Tuttavia, la critica di Helmholtz era diversa: ammettendo la coerenza interna dell'argomentazione, ne negava una delle premesse. *Possiamo* immaginare spazi non euclidei, diceva, anche se ciò può esser difficile per il fatto che non ci sono familiari. Da questo punto di vista conseguiva naturalmente che l'argomentazione di Kant, anche se era formalmente valida, non poteva dimostrare l'apriorità dello spazio euclideo in particolare, ma soltanto di uno spazio in generale, che comprendeva egualmente quello di Euclide e gli altri.[22]

[21] V. Land su « Mind », vol. II.

Nonostante io sia d'accordo con Helmholtz nel ritenere empirica la distinzione tra spazi euclidei e non euclidei, non riesco a pensare che la sua discussione sulla « immaginabilità » di questi ultimi sia molto felice. La validità di qualsiasi dimostrazione deve vertere ovviamente sulla definizione di immaginabilità. La definizione che ne dà Helmholtz nella sua risposta a Land è la seguente: L'immaginabilità richiede « die vollstandige Vorstellbarkeit derjenigen Sinnesendrüke... » (*Wiss. Abh*, II, p. 644). Questa definizione non è molto chiara, a causa dell'ambiguità della parola « Vorstellbarkeit». La definizione successiva suona meno ambigua: « Wenn die Reihe der Sinneseindrüke... » (*Vorträge und Reden*, II, p. 234). Questo rende chiaro ciò che appare anche dal modo in cui lo dimostra, che considera immaginabili e cose che possono venir *descritte* in termini concettuali. Come fa notare Land (« Mind », vol. II, p. 45) tale « non è il significato da attribuire in questo caso alla discussione ». Che la critica di Land sia giusta, è dimostrato dalla prova di Helmholtz degli spazi non euclidei, perché essa consiste soltanto in una analogia col volume interno alla sfera che si ottiene matematicamente così: Prendiamo i simboli che rappresentano le grandezze nello spazio «pseudosferico » (iperbolico) e diamo loro un nuovo significato euclideo; così tutte le nostre proposizioni simboliche diventano passibili di due interpretazioni, una per lo spazio pseudo-sferico, e l'altra per il volume interno a una sfera. Tuttavia è abbastanza ovvio che questo procedimento, anche se ci rende possibile *descrivere* il nostro nuovo spazio, non ci rende possibile *immaginarlo*, nel senso che richiama le immagini di come le cose apparirebbero in esso. Da questa analogia in realtà non deriviamo maggiore conoscenza di quella che un uomo nato cieco può derivare, riguardo alla luce, da un'analogia col calore. Il detto « Nihil est in intellectu quod non fuerit ante in sensu » sarebbe indubitabilmente vero, se ad *intelletto* sostituissimo *immaginazione*; è quindi vano *se* il nostro spazio reale è euclideo, sperare nella *capacità* di immaginare uno spazio non euclideo. Ciò che Helmholtz avrebbe potuto sostenere, ritengo con fede assoluta, nei confronti di Land, è che l'immagi-

[22] V. il paragrafo di chiusura dell'articolo di Helmholtz su « Mind », vol. III.

ne che effettivamente abbiamo dello spazio non è sufficientemente esatta da escludere, nello spazio reale che conosciamo, ogni possibilità di un pur minimo scostamento dal tipo euclideo. Ma nel sostenere che non possiamo immaginare, anche se possiamo concepire e descrivere, uno spazio diverso da quello che in realtà abbiamo, Land, a mio parere, ha indubbiamente ragione. Per un kantiano puro, che sostiene con Land che nessuno degli assiomi può venir dimostrato, questa questione è di grande importanza. Ma se, come ho sostenuto io, alcuni degli assiomi sono suscettibili di dimostrazione trascendentale, mentre altri possono esser verificati empiricamente, la questione viene liberata dalle implicazioni psicologiche, e l'immaginabilità o meno degli spazi metageometrici perde di importanza.

69. Veniamo adesso alla terza questione, la più importante, la relazione della geometria con la meccanica. Vi sono tre modi in cui si può interpretare il richiamo di Helmholtz ai corpi rigidi: il primo ritengo sia il senso in cui lo intendeva lui inizialmente; il secondo pare sia il senso che adottò nella sua difesa contro Land; mentre il terzo viene ammesso da Land, e sarà ammesso nell'argomentazione che segue. Questi tre sensi sono:

1) Si può sostenere che il vero significato dell'assioma del Libero Movimento sta nell'affermazione dei corpi rigidi empirici, e che le due proposizioni equivalgono una all'altra. Ciò è certamente falso.

2) Si può dire che l'assioma del Libero Movimento è logicamente distinguibile dall'affermazione dei corpi rigidi, e potrebbe anche non essere empirico; ma esso è sterile, anche per la geometria pura, senza l'aiuto delle misure che in sé devono essere corpi rigidi empirici. Questo significato è più plausibile del primo, ma ritengo sia possibile dimostrare che, anche in questo senso, la proposizione è falsa.

3) Per la geometria pura e lo studio astratto dello spazio, si può dire che il Libero Movimento, applicato a una questione geometrica astratta, offra una possibilità sufficiente di confronto quantitativo; ma il momento in cui noi estendiamo i nostri risultati alla matematica mista e li applichiamo a una data materia empiricamente data, abbiamo bisogno, come misure, anche di corpi rigidi empiricamente dati, o almeno, corpi il cui scostamento dalla rigidità sia empiricamente noto. In questo senso, lo ammetto, la proposizione è giusta.[23]

Nel discutere questi tre significati, non mi limiterò strettamente al testo di Helmholtz o di Land; se cercassi di farlo, mi troverei di fronte alla difficoltà che nessuno di essi definisce l'*a priori*, e che ciascuno è troppo incline, a mio avviso, a provarlo con criteri psicologici. Considererò quindi i tre significati a turno, senza sottolinearne l'aderenza storica ai punti di vista di Land o di Helmholtz.

70. (1) La congruenza può essere intesa significare – come Helmholtz sembrerebbe senz'altro auspicare – che si riscontra che i corpi reali, nella nostra esperienza meccanica, mantengono la propria forma con costanza approssimativa, e che da questa esperienza deduciamo l'omogeneità dello spazio. Questo punto di vista, a mio parere, fraintende completamente la natura della misurazione, e degli assiomi da essa comportati. Perché, cosa si intende per corpo non rigido? Intendiamo semplicemente che ha cambiato di forma. Ma questo comporta la possibilità del confronto con la forma di prima; in altre parole, della misurazione. Quindi, affinché possa sussistere la questione della rigidità o non rigidità, deve essere già possibile la misurazione delle grandezze spaziali. Ne consegue che la misurazione non può, senza creare un circolo vizioso, essere essa stessa derivata dall'esperienza dei corpi rigidi. La misurazione geometrica, infatti, è il confronto di grandezze spaziali, e tale confronto comporta come verrà dimostrato diffusamente nel terzo capitolo, l'omogeneità dello spazio. Essa è perciò il presupposto logico di ogni esperienza dei corpi rigidi, e non può essere il risultato di quell'esperienza. Senza l'omogeneità dello spazio, la nozione stessa di rigidità o non-rigidità non potrebbe esistere, dato che significano rispettivamente costanza o incostanza della grandezza spaziale in parti di materia, e perciò entrambe presuppongono egualmente la possibilità della misurazione spaziale. Dalla omogeneità dello spazio noi apprendiamo che un corpo, quando si muove, non cambierà di forma senza qualche causa fisica; che esso effettivamente non cambi di forma non viene mai sostenuto, ed in effetti è noto che è falso. Non appena è possibile la misurazione, possono venire valutati i cambiamenti reali di forma, e ne possono venire ri-

[23] Cfr. Veronese, *Grundzüge der Geometrie* (traduzione tedesca) p. IX. Anche p. XXXIV, 304, e la nota II, pp. 692-4.

cercate le cause empiriche. Ma se lo spazio non fosse omogeneo, la misurazione sarebbe impossibile, una forma costante sarebbe un'espressione senza senso, e la rigidità non potrebbe mai venir sperimentata. La congruenza afferma, in breve, che un corpo può muoversi, per quanto riguarda semplicemente lo spazio, senza cambiare di forma; la rigidità afferma che esso in effetti si muove in questo modo – una proposizione molto diversa, che comporta ovviamente, quale precedente logico, la proposizione geometrica precedente.

Questo argomento può riassumersi nella seguente distinzione: Se i corpi cambiano di forma col moto – e in qualche modo, dato che nessun corpo è perfettamente rigido, devono farlo tutti – allora si verificherà uno dei due casi seguenti: *O* i cambiamenti di forma, quando i corpi si muovono da un luogo all'altro, non seguono alcuna legge geometrica, non sono per esempio funzione della quantità o della direzione del moto; nel qual caso la legge di causalità richiede che essi non siano effetto del cambiamento di luogo, ma di qualche simultanea variazione non geometrica, come la temperatura. *Oppure* i cambiamenti sono regolari, e la forma S in una nuova posizione p, diventa $Sf(p)$. In questo caso, la legge delle variazioni concomitanti ci porta ad attribuire il cambiamento di forma al semplice movimento, e la forma diviene così funzione della posizione assoluta. Ma ciò è assurdo, perché la posizione *significa* semplicemente una relazione o gruppo di relazioni; è perciò impossibile che la semplice posizione debba essere in grado di apportare cambiamenti in un corpo. La posizione è un termine di una relazione, non una cosa a sé stante; non può quindi agire su una cosa, né esistere in se stessa, isolata dagli altri termini della relazione. Così il punto di vista di Helmholtz che la congruenza dipende dall'esistenza dei corpi rigidi, dato che comporta la posizione assoluta, deve essere condannato come errore logico. La congruenza, infatti, come dimostrerò più ampiamente nel terzo capitolo, è una deduzione *a priori* dalla relatività della posizione.

71. (2) L'argomentazione sopra esposta mi sembra risponda soddisfacentemente all'opinione di Helmholtz nell'esatta forma in cui la fornì lui da principio. Dobbiamo convenire che l'assioma della congruenza, è logicamente distinguibile dall'esistenza dei corpi rigidi. Ciononostante la geometria comporta logicamente qualche riferimento alla materia,[24] ma che questo riferimento renda la geometria empirica, o piuttosto non dimostri un elemento *a priori* nella dinamica, è un'altra faccenda.

Il riferimento alla materia è richiesto dalla omogeneità dello spazio vuoto. Fintantoché lasciamo la materia da parte, una posizione è perfettamente indistinguibile dall'altra e una scienza delle relazioni tra le posizioni è impossibile. In effetti, prima che possano sorgere comunque delle relazioni spaziali, deve andar distrutta l'omogeneità dello spazio vuoto, e la distruzione deve essere effettuata dalla materia. La pagina bianca è inutile per il geometra, finché non ne corrompe l'omogeneità con delle righe ad inchiostro o a matita. In breve, non è concepibile nessuna figura spaziale senza riferimento a una materia non puramente spaziale. E ancora, se si deve mai usare la congruenza, deve esistere il moto, ma un punto puramente geometrico, essendo definito unicamente dai suoi attributi spaziali, non si può supporre che si muova senza incorrere in una contraddizione di termini. Ciò che si muove, quindi, deve essere materia. Quindi, affinché il moto possa rappresentare prova di eguaglianza, dobbiamo avere qualche *materia* che è noto rimanga inalterata con il moto, cioè dobbiamo avere dei corpi rigidi. E la difficoltà è che questi corpi non solo non debbono sottostare ad alcun cambiamento dovuto unicamente alla natura dello spazio, ma inoltre debbono rimanere inalterati dalla relazione mutevole con altri corpi. E qui abbiamo un requisito che non può più venire rispettato *a priori*; in quanto sappiamo, a rigore, che è falso. Perché le forze che agiscono su un corpo dipendono dalle sue relazioni spaziali con altri corpi, e delle forze mutevoli è probabile che producano una configurazione mutevole. Perciò, sembrerebbe che l'effettiva misurazione debba essere puramente empirica, e debba dipendere dal grado di rigidità che si può ottenere durante il processo di misurazione, nei corpi dei quali ci occupiamo. Ritengo che tale conclusione sia valida per tutte le misurazioni reali. Ma la possibilità di questa rigidità empirica ed approssimata, devo insistere, dipende dalla legge *a priori* che il *semplice* moto senza il concorso dell'azione di un'altra materia, non può causare un cambiamento di forma. Perché senza questa legge, non verrebbe scoperto l'effetto dell'altra materia; le leggi del moto sarebbero assurde, e la fisica sarebbe impossibile.

[24] V. cap. 4, par. 197 e ss.

Prendete per esempio la seconda legge: Come potremmo misurare la variazione del moto, se il moto in sé producesse un cambiamento nelle nostre misure? Oppure prendete la legge della gravitazione: Come potremmo determinare l'inverso del quadrato, se non fossimo in grado, indipendentemente dalla dinamica, di misurare le distanze? In breve, l'intera scienza della dinamica dipende fondamentalmente dalla geometria e se non fosse per la possibilità di misurare indipendentemente le grandezze spaziali, non si potrebbe misurare nessuna delle grandezze della dinamica. Il tempo, la forza e la massa vengono misurate ugualmente dalle correlazioni spaziali: tali correlazioni vengono date, per il tempo dalla prima legge, per la forza e la massa, dalla seconda e dalla terza. È vero quindi, che un elemento empirico compare inevitabilmente in ogni misurazione effettiva, in quanto possiamo sapere solo empiricamente che un dato pezzo di materia conserva la sua forma durante il cambiamento necessario delle relazioni dinamiche con l'altra materia comportato dal moto, ma è altrettanto vero che, per la geometria – per la quale la materia è considerata semplicemente l'interruzione necessaria della omogeneità dello spazio e il termine necessario delle relazioni spaziali, non la portatrice di forze che mutano la configurazione di altri sistemi materiali — per la geometria, che tratta la materia come astratta e puramente cinematica, la rigidità è *a priori* in quanto le uniche variazioni che conosce – cioè variazioni di semplice posizione – non sono in grado di modificare la forma dei corpi immaginari ed astratti dei quali si occupa. Per usare una distinzione scolastica, possiamo dire che la materia è la *causa essendi* dello spazio, ma la geometria è la *causa cognoscendi* della fisica. Senza una geometria indipendente dalla fisica, la fisica in sé, che necessariamente presume i risultati della geometria, non potrebbe mai sorgere; ma quando la geometria viene usata dalla fisica, perde un po' della sua certezza *a priori* e acquisisce il carattere empirico ed approssimato che è proprio ad ogni resoconto dei fenomeni reali.

72. (3) Questo argomento ci porta alla distinzione di Land tra rigidità fisica e geometrica. La distinzione può venire espressa – e ritengo venga espressa meglio – facendo mente locale ai concetti di materia proprî rispettivamente alla dinamica e alla geometria. Nella dinamica ci interessiamo alla materia soggetta al moto o causa di moto, soggetta a una forza o esercitante una *forza*. Ci interessiamo quindi ai cambiamenti

della configurazione spaziale cui vanno soggetti i sistemi materiali: la descrizione e la spiegazione di questi cambiamenti è l'argomento specifico di tutta la dinamica. Ma affinché possa esistere una scienza del genere, è ovviamente necessario che la configurazione spaziale sia già misurabile. Se questo non fosse il caso, il moto, l'accelerazione e la forza rimarrebbero del tutto indeterminate. Perciò la geometria deve esistere già prima che la dinamica diventi possibile: far dipendere la geometria, perché sia possibile, dalle leggi del moto o da qualcuna delle loro conseguenze, è un grossolano ὕστερόν πρότερον. Ciononostante, come abbiamo visto, alla geometria è indispensabile qualche specie di materia. Ma questa materia geometrica è una materia più astratta e completamente diversa da quella della dinamica. Per potere studiare lo spazio in sé stesso, riduciamo le proprietà della materia al puro minimo: evitiamo completamente la categoria della causalità, tanto essenziale alla dinamica e non conserviamo altro, nella nostra materia, che gli attributi spaziali.[25] Il tipo di rigidità attribuito a questa materia astratta – un tipo che è sufficiente per la teoria della nostra scienza, anche se non lo è per la sua applicazione agli oggetti della vita quotidiana – è puramente geometrico, e non afferma altro che questo: Che dato che la nostra materia è priva, *ex hypothesi*, di proprietà causali, non rimane nulla, nel mero spazio vuoto, che sia in grado di cambiare la configurazione di qualsiasi sistema geometrico. Un cambiamento della posizione assoluta, asserisce, è niente; e quindi l'unico cambiamento effettivo comportato dal moto è un cambiamento di relazione con l'altra materia; ma quest'altra materia, ai fini della nostra scienza, è considerata priva di capacità causali, e perciò, nella configurazione del nostro sistema non può verificarsi nessun cambiamento per semplice effetto del moto attraverso lo spazio vuoto. La necessità di un principio del genere può venire dimostrata con una semplice *reductio ad absurdum*, come segue. Un movimento di traslazione dell'universo nel suo insieme, di direzione e velocità costante, è dinamicamente trascurabile; in verità, filosoficamente, non è per niente un moto perché non comporta nessun cambiamento nella condizione o re-

[25] Cfr. l'opinione di Bolyai citata da Erdmann, *Axiome*, p. 26; cfr. anche *ib.*, p. 60.

lazioni reciproche delle cose nell'universo. Ma se la nostra rigidità geometrica venisse negata, il cambiamento del parametro dello spazio potrebbe causare un cambiamento nella forma di tutti i corpi, dovuto al semplice cambiamento della posizione assoluta, il che è ovviamente assurdo.

Per rendere completamente chiara la funzione dei corpi rigidi nella geometria, supponiamo un geometra liquido in un mondo liquido. Non possiamo supporre il liquido perfettamente omogeneo e non differenziato, in primo luogo perché un liquido del genere non potrebbe distinguersi dallo spazio vuoto, e in secondo luogo perché il corpo del nostro geometra – a meno che non fosse uno spirito disincarnato – costituirà già una differenziazione per lui. Possiamo perciò immaginare

> pallidi raggi
> che in mezzo alla corrente
> intesson trame di luce colorata,

e possiamo supporre che queste trame siano oggetto delle riflessioni del nostro geometra. Allora, sarà in grado di immaginare una trama in cui le linee siano rette, o circolari, o paraboliche, o di qualsiasi altra forma, e sarà in grado di dedurre che una trama del genere, se può venire intessuta in una parte del fluido, potrà venire intessuta in un'altra. Ciò rappresenterà una base sufficiente per le sue deduzioni. La sovrapposizione che lo interessa – dato che non è l'eguaglianza effettiva, ma soltanto le condizioni formali dell'eguaglianza, a formare argomento della geometria – è puramente ideale e non viene alterata dall'impossibilità di congelare una qualsiasi trama reale. Ma per poter applicare la sua geometria alle esigenze della vita avrebbe bisogno di qualche standard di paragone tra le trame reali e qui, è vero, avrebbe bisogno o di un corpo rigido, o di conoscere le condizioni che hanno dato origine a trame come quelle. Inoltre, poiché quelle condizioni sono necessariamente empiriche, è difficile che possano esser note, se non per una misurazione precedente. Quindi per la geometria applicata, anche se non per quella pura, pare sia indispensabile almeno un corpo rigido.

73. L'utilità per la dinamica, della nostra materia geometrica astratta, è abbastanza evidente. Poiché abbiamo per suo mezzo il potere di determinare la configurazione dei sistemi materiali in qualsiasi parte dello spazio, e di conoscere quali cambiamenti di configurazione non sono dovuti al semplice cambiamento di posto, siamo in grado di attribuire quei cambiamenti all'azione di altra materia, e così stabilire la nozione di forza, che sarebbe impossibile se il cambiamento di forma fosse dovuto allo spazio vuoto.

E così, per concludere, la geometria richiede, se deve risultare *praticamente* possibile, qualche corpo o corpi che siano o rigidi (nel senso dinamico) o sia noto che subiscono determinati cambiamenti di forma, secondo una legge definita. (Possiamo supporre che tali cambiamenti siano noti alle leggi della fisica, che sono state determinate sperimentalmente e che presumono interamente la verità della geometria). Uno o più di tali corpi sono necessari alla geometria applicata – ma solo nel senso che sono necessari righe e compassi. Essi sono necessari come, per disegnare la carta topografica militare, è stato necessario un apparato elaborato per misurare la base di approvvigionamento nella Piana di Salisbury. Ma per la *teoria* della geometria, è sufficiente la rigidità geometrica, e la rigidità geometrica significa soltanto che una forma che è possibile in una parte dello spazio, è possibile in qualsiasi altra. L'elemento empirico nella realtà, che deriva dalla natura puramente empirica della rigidità fisica, è da paragonarsi alle inesattezze empiriche che derivano dal mancato riscontro di linee rette e cerchi nel mondo – che nessuno tranne Mill ha ritenuto rendesse la geometria stessa empirica ed inesatta. Ma subordinare la geometria alla perfezione della fisica, è rendere la fisica che dipende interamente dalla geometria, impossibile per sempre. È come se rimandassimo la formazione dei numeri, finché non abbiamo contato le case a Piccadilly.

Erdmann.

74. In relazione a Riemann ed Helmholtz, viene naturale di considerare il lavoro filosofico di Erdmann sulle loro teorie.[26] Il suo è senz'altro il libro più importante sull'argomento che sia apparso dal punto di vista filosofico, e nonostante il fatto che, come l'intera teoria di Riemann ed Helmholtz, non

[26] *Die Axiome der Geometrie: eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie*, Leipzig, 1877.

sia applicabile alla geometria proiettiva, merita ancora una discussione molto approfondita.

Erdmann è interamente d'accordo con le conclusioni di Riemann ed Helmholtz, tranne su pochi punti di minore importanza; e le sue opinioni, come questo accordo farebbe ritenere, sono ultra-empiriche. In effetti la sua logica pare – anche se esito a dirlo – incompatibile con qualsiasi sistema che non sia quello di Mill; apparentemente non c'è in lui alcuna distinzione tra il generale e l'universale, non esiste concetto che non sia incorporato in una serie di istanze. Una teoria della logica del genere, a mio avviso, vizia la maggior parte del suo lavoro come viziava la filosofia di Riemann.[27] Questa critica generica sarà illustrata abbondantemente nel corso del nostro esame delle idee di Erdmann.

75. Dopo una introduzione generale, ed una breve storia dello sviluppo della metageometria, Erdmann passa nel secondo capitolo, a discutere cosa siano gli assiomi della geometria euclidea. Lascia da parte i cosiddetti assiomi aritmetici, che si applicano alle grandezze in generale; ciò che vogliamo qui, afferma, è una definizione dello spazio, per cui gli assiomi geometrici sono i soli che ci interessano. Ma una definizione dello spazio, dice, – seguendo Riemann – richiede un genere di cui lo spazio sarà una specie, e questo, dato che il nostro spazio è psicologicamente unico, può essere fornito soltanto dalla matematica analitica (p. 36). Ora, le forme spaziali di cui tratta la geometria sono le grandezze; e i concetti di grandezza vengono applicati ovunque in geometria. Ma prima di Riemann, potevano venire mostrate come grandezze, soltanto determinazioni specifiche dello spazio e così era impossibile ottenere la definizione desiderata. Ora, comunque, possiamo classificare lo spazio come un insieme in un concetto generale di grandezza, e ottenere così, oltre all'intuizione dello spazio e al concetto di spazio, una terza forma, cioè il concetto dello spazio come grandezza (*Grössenbegriff vom Raum*, pp. 38, 39). Tale definizione ci fornirà il sistema completo ma non sovrabbondante degli assiomi, che non potrebbe essere ottenuto trasformando l'intuizione generale dello spazio nel concetto di spazio, per mancanza di una pluralità di casi (p. 40).

[27] Circa l'influenza di Mill, cfr. Stallo, *Concetti della Fisica Moderna*, p. 216.

76. Prima di esaminare il metodo di definizione che segue, riflettiamo sulle teorie che comporta l'interpretazione di cui sopra del concetto di spazio come grandezza. In primo luogo, si presume che non si possano formare dei concetti se non abbiamo una serie di oggetti separati dai quali astrarre una proprietà comune – in altre parole, che l'universale è sempre il generale. In secondo luogo, si presume che ogni definizione è una classificazione sotto un genere. In terzo luogo, il concetto di grandezza, se non vado errato, è fondamentalmente male interpretato, quando si suppone che possa venire applicato allo spazio come un insieme. Ma in quarto luogo, anche se esistesse, un concetto del genere, non potrebbe fornire nessuna delle proprietà essenziali dello spazio. Consideriamo questi quattro punti uno di seguito all'altro.

77. Riguardo al primo punto, si deve notare che la gente aveva certamente qualche concetto dello spazio prima che Riemann inventasse la nozione del molteplice, e che questo concetto era senz'altro qualcosa di diverso dalle qualità comuni a tutti i punti, linee o figure nello spazio. In secondo luogo, il punto di vista di Erdmann renderebbe impossibile concepire Dio, tranne che fossimo politeisti, o l'universo, – tranne che come Leibnitz, si immaginasse una serie di mondi possibili costituiti di fronte a Dio, e quindi nessuno di essi sarebbe un vero Universo – o per fare un esempio che possa essere più gradito a un empirista, il centro necessariamente unico della massa dell'universo materiale. In breve, per il punto di vista di Erdmann, diventa impossibile qualsiasi universale che rappresenti un legame o un'unione tra le cose, e non semplicemente una proprietà comune ad oggetti indipendenti. Quindi, se non adottiamo tutta intera la filosofia di Mill, non possiamo ritenere che il concetto di spazio richieda una serie di casi da cui astrarsi. Ma anche se lo ritenessimo tale, i molteplici di Riemann ci lascerebbero senza risorse. Perché lo spazio euclideo al termine della sua serie di determinazioni, appare ancora unico. Abbiamo esempi di molteplici, ma non esempi di spazio euclideo. Così se la teoria dei concetti di Erdmann fosse giusta, lo lasceremmo ancora a cercare invano il concetto di spazio euclideo.

78. Il secondo punto, l'idea che ogni definizione è classificazione, è intimamente legato al primo, e tutti e due ci sprofondano nella logica formale scolastica. Gli stessi esempi di cose

che secondo Erdmann non potrebbero venire concepite, adesso possono venire portati come cose che non possono venire definite. Ciò che è stato detto sopra vale anche qui, e quindi non serve discutere oltre questo punto.[28]

79. Riguardo al terzo punto, cioè l'impossibilità di applicare il concetto di grandezza allo spazio come insieme, sarà necessaria una discussione più lunga, perché qui siamo interessati all'intera questione della natura logica dei giudizi di grandezza. E come prima avevamo troppi paragoni rispetto a quanto serviva, ora ne abbiamo troppo pochi. Cercherò di spiegare questo punto, che è di grande importanza, e ritengo che metta in evidenza la maggior parte degli errori filosofici della scuola di Riemann.

Un giudizio sulla grandezza è sempre un giudizio basato sul paragone, e per di più, un paragone non riguarda mai la qualità, ma solo la quantità. La qualità in un giudizio sulla grandezza, è supposta identica nell'oggetto di cui viene definita la grandezza, e nell'unità alla quale viene paragonato. Ma la qualità, tranne per i numeri puri e per le quantità pure di cui tratta il calcolo, è sempre presente, ed in parte viene assorbita nella quantità, in parte non viene toccata dal giudizio sulla grandezza. Come dice Bosanquet (*Logica*, vol. I, p. 124) « La comparazione quantitativa non è correlata *prima facie* a quella qualitativa, ma piuttosto sta al suo posto quale *effetto della comparazione qualitativa*, che in quanto raffrontabile *diventa quantitativa*, e in quanto non raffrontabile fornisce la distinzione tra le parti essenziale all'insieme quantitativo » (il corsivo è nell'originale). Così, se dobbiamo considerare lo spazio come una grandezza, dobbiamo essere in grado di addurre tutte quelle serie di casi di cui parla Erdmann, e che sembravano irrilevanti per il concetto di spazio. Ma rimane da provare che la comparazione, che *possiamo* effettuare tra spazi diversi, è passibile d'esprimersi in forma quantitativa. Sembrerebbe piuttosto che la differenza di qualità sia tale da impedire la comparazione quantitativa tra spazi diversi, e quindi da impedire anche ogni giudizio di grandezza circa lo spazio nel suo insieme. Qui potrebbe sembrare che facciano eccezione gli spazi non euclidei, le cui costanti spaziali forniscono una grandezza determinata inerente allo spazio nel suo insieme e, quindi, si potrebbe ritenere che caratterizzino lo spazio come grandezza. Ma questo è un errore. Perché la costante spaziale, in spazi del genere, è l'unità fondamentale, il termine fisso di ogni comparazione quantitativa; quindi in se stessa è priva di quantità perché non esiste alcuna grandezza data indipendentemente con la quale paragonarla. Un mondo non euclideo, nel quale la costante spaziale e tutte le linee e le figure venissero improvvisamente moltiplicate secondo un rapporto costante, rimarrebbe assolutamente invariato; le linee, misurate a confronto della costante spaziale, avrebbero la stessa grandezza di prima, e la costante spaziale stessa, non avendo uno standard esterno di paragone, sarebbe priva di quantità e quindi non sarebbe soggetta a variazioni quantitative. In altre parole, un ingrandimento del genere di un mondo non euclideo non significa niente, e ciò dimostra come la nozione di quantità non sia applicabile allo spazio nel suo insieme.

[28] Questo punto di vista pare sia stato tratto da Herbart attraverso Riemann. V. *Physic. als Wiss.*, ed. Hart, vol. V, p. 262.

Si potrebbe obbiettare che questo dimostra soltanto l'assenza di differenza quantitativa tra spazi diversi di costante spaziale positiva, o tra quelli di costante spaziale negativa; si potrebbe dire che la differenza quantitativa rimane tra quelli di curvatura positiva in generale, e quelli di curvatura negativa in generale, o tra tutti e due e lo spazio euclideo. Questo lo nego decisamente. Non esiste alcuna unità qualitativamente simile nei tre tipi di spazio, secondo la quale potrebbe effettuarsi una comparazione quantitativa. Le linee rette di uno spazio non possono esser messe nell'altro: le due linee rette di uno spazio, il cui prodotto è il reciproco della misura della curvatura, non hanno curve corrispondenti nell'altro spazio, e quindi le misure di curvatura non possono venire messe in rapporto quantitativo l'una con l'altra. Che una possa venire considerata positiva e l'altra negativa, lo ammetto, ma il loro valore è indeterminato e le unità sono qualitativamente diverse nei due casi. Un debito di 300 sterline può venire descritto come un attivo contabile di — 300 sterline, mentre la torre Eiffel ha un'altezza di +300 metri, ma non ne consegue che essi siano quantitativamente paragonabili. Per la costante spaziale è lo stesso: la costante spaziale in se stessa è l'unità di grandezza nel proprio spazio, e differisce qualitativamente dalla costante spaziale di un altro tipo di spazio.

E ancora, per addentrarci in una discussione più filosofica, due spazi diversi non possono coesistere nello stesso mondo; è possibile che noi non siamo capaci di decidere quali sono le

alternative della separazione, ma cionondimeno esse rimangono alternative assolutamente incompatibili. Perciò non possiamo ottenere la coesistenza dei due spazi, che è indispensabile alla comparazione. Il fatto pare sia che Erdmann, nella sua ammirazione per Riemann ed Helmholtz, è caduto negli stessi preconcetti matematici ed ha supposto, come i matematici tendono naturalmente a presupporre, che la quantità esista ovunque, che sia sempre applicabile ed adeguata, e possa riguardare più che un semplice paragone tra cose le cui qualità sono già note come simili.[29]

80. Ciò suggerisce il quarto ed ultimo dei punti di cui sopra, che le *qualità* dello spazio, anche se lo spazio potesse venire considerato a ragione una grandezza, dovrebbero venire completamente omesse in questo modo di considerarlo, e che perciò da tale trattamento non verrebbe fuori nessuna delle sue proprietà importanti o essenziali. Perché considerare lo spazio come una grandezza, comporta, come abbiamo visto, un paragone con qualcosa qualitativamente simile, ed una astrazione dalle qualità simili. Fino a un certo punto, e con l'aiuto di alcuni argomenti dubbi, un confronto del genere viene istituito da Riemann ed Erdmann; ma una volta che lo hanno istituito, si dimenticano completamente delle qualità comuni da cui ne dipende la possibilità. Ma sono precisamente queste le qualità fondamentali dello spazio, le qualità dalle quali, come cercherò di dimostrare nel terzo capitolo, discendono *a priori* gli assiomi comuni ad Euclide ed alla metageometria. Sono questi i pericoli del pregiudizio quantitativo.

81. Dopo questa riserva nei confronti degli assunti iniziali nella deduzione dello spazio di Erdmann, torniamo ad esaminare il modo in cui viene effettuata questa deduzione. Qui, vi sarà meno fondamento per la critica, perché ritengo che la deduzione, dati i presupposti, sia buona quanto potrebbe esserlo una deduzione del genere. Per definire lo spazio come una grandezza, egli dice, cominciamo con due delle sue proprietà più ovvie, la continuità e le tre dimensioni. I toni e i colori forniscono altri casi di un molteplice con queste due proprietà, ma differiscono dallo spazio in quanto le loro dimensioni non sono omogenee ed intercambiabili. Per indicare questa

[29] La stessa irriducibilità dello spazio a mera grandezza viene dimostrata dai lati e dai triangoli sferici di Kant, in cui persiste una differenza, nonostante la completa eguaglianza quantitativa.

differenza, Erdmann introduce un'utile coppia di termini: nel caso generale, definisce un molteplice a *n* determinazioni (n-*bestimmt*); nel caso in cui, come nello spazio, le dimensioni sono omogenee, definisce il molteplice a *n*-estensioni (*n-ausgedehnt*). I molteplici dell'ultimo tipo li chiama estensioni (*Ausgedehntheiten*). Sembra che non si accorga che la differenza tra i due tipi è qualitativa e non quantitativa; e inoltre trascura il fatto che nel secondo tipo, per la definizione stessa, deve valere l'assioma della congruenza a motivo della somiglianza qualitativa delle diverse parti. Nonostante questo fatto, definisce lo spazio un'estensione, e poi considera la congruenza empirica e probabilmente falsa nell'infinitesimale. Ciò è ancora più strano perché egli effettivamente dimostra (p. 50) che la misurazione è impossibile in una estensione tranne che le parti siano indipendenti dal luogo e possano muoversi senza subire variazioni, come le misure. Nonostante questo, procede immediatamente a discutere se la misura della curvatura è costante o variabile, senza chiedersi come potrebbe esistere la geometria in quest'ultimo caso. Non possiamo sapere, afferma, dalla sovrapposizione geometrica, che i corpi geometrici sono indipendenti dal luogo, perché se le loro dimensioni variassero col moto secondo una legge fissa, due corpi che potessero venire sovrapposti in un luogo, potrebbero venire sovrapposti in qualsiasi altro. Che un'ipotesi del genere comporti la posizione assoluta e neghi la somiglianza qualitativa delle parti dello spazio che egli proclama (p. 171) essere il principio della sua teoria della geometria, non viene mai intuito. Ma per di più, la sua idea che la grandezza sia qualcosa di assoluto, gli ha impedito di vedere che una ipotesi del genere è senza significato. Lui stesso dice che anche in base a questa ipotesi un corpo geometrico può definirsi quello i cui punti mantengono distanze costanti l'uno dall'altro perché, dato che non abbiamo una misura assoluta, la misurazione non potrebbe rivelarci un cambiamento della grandezza assoluta (p. 60). Ma questa non è una *reductio ad absurdum*? Perché la grandezza non rappresenta niente, separata dalla comparazione, e qui la comparazione può venire effettuata soltanto per sovrapposizione; allora, se per l'ipotesi di cui sopra, la sovrapposizione dà sempre lo stesso risultato, con qualsiasi movimento venga effettuata, non c'è alcun senso a parlare di grandezze che non sono più eguali quando sono separate; la grandezza assoluta è un'assurdità, e la grandezza che risulta dalla comparazione non differisce da

quella che si otterrebbe se le dimensioni dei corpi rimanessero inalterate col moto. Perciò, poiché la grandezza si può comprendere soltanto come risultato della comparazione, le dimensioni dei corpi *sono* invariate dal moto, e l'ipotesi suggerita è priva di significato. Su questo argomento avrò altro da dire nel terzo capitolo.[30]

82. Tuttavia questa ipotesi non viene introdotta fine a se stessa, ma soltanto per annunziare il *deus ex machina* helmholtziano, la dinamica. Perché la dinamica dimostra – così continua fiducioso Erdmann – che la rigidità deve valere non semplicemente rispetto ai rapporti, nel suddetto senso geometrico ristretto, ma rispetto alle grandezze assolute (p. 62). E qui abbiamo infine la vera congruenza, empirica come è empirica la dinamica, e impossibile da dimostrare senza la dinamica. Ho già criticato il punto di vista di Helmholtz circa la dipendenza della geometria dalla dinamica, e qui non serve che mi dilunghi molto. È un peccato che Erdmann non abbia specificato in nessun modo il procedimento secondo il quale la dinamica determina le alternative geometriche – in effetti pare che si affidi all'*ipse dixit* di Helmholtz. Non so proprio come fare a capire come, se la geometria è del tutto incapace di scoprire un cambiamento nelle dimensioni del tipo suggerito, dovrebbero essere in grado di scoprirlo, se esistesse, le leggi del moto che dipendono interamente dalla geometria. Il moto uniforme in linea retta, per esempio, presuppone la misurazione geometrica; se questa misurazione è errata, ciò che la dinamica ritiene sia moto uniforme non è in realtà tale, ma la dinamica non può mai rilevare la differenza. Se le leggi del moto fossero state considerate *a priori* la geometria avrebbe anche potuto avvantaggiarsene; ma finché sono empiriche, presuppongono la misurazione geometrica e perciò non possono condizionarla né influenzarla.

La conclusione di Erdmann nel secondo capitolo è che la congruenza è probabile, ma non può essere verificata nell'infinitesimale; che la sua verità comporta l'esistenza effettiva dei corpi rigidi (anche se, a proposito, sappiamo che questi, nel vero senso della parola, non esistono), che i corpi rigidi si possono muovere liberamente, e non mutano le loro dimensioni con la rotazione (monodromia di Helmholtz); che l'assioma delle tre dimensioni è certo, dato che sono impossibili piccoli

[30] V. par. 146-7.

errori; e che i rimanenti assiomi di Euclide – quelli della linea retta e della parallele – valgono approssimativamente se non esattamente per il nostro spazio reale. (pp. 78-83). Egli non discute come, in base a questo punto di vista, la congruenza sia compatibile con la teoria atomica, o anche con le deformazioni dei corpi approssimativamente rigidi osservate; né come, se lo spazio è omogeneo come egli ritiene, i corpi rigidi non possano muoversi liberamente nello spazio. Gli assiomi sono tutti empirici, in blocco, e nei capitoli che seguono appare evidente che Erdmann ritiene che la loro natura empirica sia sufficientemente dimostrata dalla validità rispetto alla materia empirica (pp. 159-165) – uno strano criterio, che giungerebbe alle stesse conclusioni con eguale facilità rispetto all'aritmetica e alle leggi del pensiero.

83. Il terzo capitolo, sulle conseguenze filosofiche della metageometria, non necessita di una lunga discussione, dato che tratta dello spazio piuttosto che della geometria. Nello stesso tempo, varrà la pena di considerare brevemente il criterio di Erdmann circa l'apriorità. A questo proposito, è molto difficile scoprirne il significato, perché pare che cambi secondo l'argomento che tratta. Così, una volta (p. 147) respinge molto enfaticamente la relazione kantiana tra l'*a priori* e il soggettivo;[31] mentre un'altra volta (p. 96) considera la presentazione delle cose esterne come parzialmente *a priori*, parzialmente empirica, semplicemente perché tale presentazione è dovuta all'interazione tra noi e le cose, ed è quindi dovuta in parte all'attività soggettiva, in parte agli oggetti esterni. Perciò egli dice, la distinzione non va intesa tra presentazioni diverse, ma fra aspetti diversi di una stessa presentazione. Questo pare che ci riporti completamente al criterio psicologico kantiano della soggettività con in più lo svantaggio di rendere la distinzione epistemologicamente senza valore, come quella tra analitico e sintetico. Eppure, non esita mai nel dichiarare ogni singola conoscenza di volta in volta empirica. Sembra insomma che, quando desidera un criterio più logico, adotti una modifica del criterio delle sensazioni di Helmholtz. Se lo spazio fosse una forma *a priori*, dice, nessuna esperienza potrebbe riuscire a cambiarlo (p. 108) ma la metageometria ha dimo-

[31] « Jeder Versuch, Kant's Lehre von der Apriorität als des subjectiven, von aller Erfahrung absolut unabhängigen Erkenntnissfaktors trotzdem zu halten, ist deshalb von vornherein aussichtslos ».

strato che non è così, dato che possiamo intuire le percezioni che ci darebbe uno spazio non euclideo (p. 115). Io ho criticato questo argomento nel discutere Helmholtz; adesso ci interessa il criterio dell'apriorità di Erdmann. Il criterio della soggettività – anche se sicuramente lo adotta nel discutere dell'apriorità dello spazio, e decide solennemente, per suo mezzo, che lo spazio è insieme *a priori* ed empirico, dato che un cambiamento in noi o nel mondo esterno potrebbe modificarlo (p. 97) — parrebbe, come molte altre sue prove, un errore da parte sua: il criterio che intende usare è quello di Helmholtz. Ritengo che questo criterio con un piccolo cambiamento nell'enunciazione, potrebbe accettarsi; a me pare una condizione necessaria, ma non sufficiente. Possiamo dire che l'*a priori*, non è soltanto quello che nessuna esperienza può cambiare, ma quello senza il quale l'esperienza diverrebbe impossibile. È la mancata discussione delle condizioni che rendono possibile l'esperienza geometrica (e quella dinamica), che vizia a mio avviso le conclusioni empiriche di Helmholtz ed Erdmann. Perché certe condizioni debbano essere necessarie per l'esperienza – a causa della costituzione della mente o per qualche altra ragione – è un'altra questione, che introduce il rapporto tra l'*a priori* e il *soggettivo*. Ma nel discutere la questione di quale conoscenza sia *a priori*, nei confronti della questione relativa alle ulteriori conseguenze dell'apriorità, sarà bene attenerci al criterio puramente logico, e mantenere così la nostra indipendenza dalle controversie psicologiche. Il fatto, se è un fatto, che il mondo potrebbe essere tale da eludere i nostri tentativi di conoscerlo, secondo il criterio di cui sopra, non invaliderà la conclusione che certi elementi della conoscenza siano *a priori;* perché, siano rispettati o meno, essi rimangono condizioni necessarie per l'esistenza di ogni conoscenza possibile.

84. Con questo avvertimento circa il significato dell'apriorità, ritengo che troveremo che le conclusioni del capitolo finale di Erdmann sui principî di una teoria della geometria, vengono ampiamente invalidate dalla diversità e dall'insufficienza delle sue prove dell'*a priori*. Comincia con l'affermare, conforme al pregiudizio quantitativo notato sopra, che la questione relativa alla natura degli assiomi geometrici è totalmente analoga alla corrispondente questione dei fondamenti della matematica pura (p. 138). Ritengo che questo sia un errore radicale: perché la funzione degli assiomi sembra essere quella di stabilire la base qualitativa sulla quale, come abbiamo visto, deve poggiare ogni comparazione quantitativa. Ma nella matematica pura tale base qualitativa è irrilevante perché si ha a che fare con la quantità pura, cioè col risultato puramente quantitativo della comparazione quantitativa, ogniqualvolta è possibile, indipendentemente dalle qualità che sottintende la comparazione. La geometria, come fa rilevare Grassmann,[32] non dovrebbe venire classificata insieme alla matematica pura, perché tratta una materia che è data all'intelletto, non creata da esso. Gli assiomi forniscono i mezzi secondo i quali tale materia si rende riferibile alla quantità, e perciò non possono essere in sé stessi dedotti da considerazioni puramente quantitative. Lasciamo però da parte questo punto e ritorniamo a Erdmann. Egli distingue, entro lo spazio, una forma e una materia: la forma conterrà le proprietà comuni a tutte le estensioni; la materia, quelle che distinguono lo spazio dalle altre estensioni. Questa distinzione, afferma, è puramente logica, e non corrisponde a quella di Kant: la materia e la forma, per Erdmann, sono egualmente empiriche. Gli assiomi e le definizioni della geometria, continua, hanno a che fare esclusivamente con la materia dello spazio. Pare un peccato, una volta fatta questa distinzione, impiegarla tanto poco: dopo qualche pagina viene lasciata cadere, e non ne viene tratta nessuna conseguenza epistemologica. Ritengo che il motivo sia che Erdmann non si è reso conto di quanto può venire dedotto dalla sua definizione di estensione, come molteplice in cui le dimensioni sono omogenee ed intercambiabili. Perché questa proprietà è sufficiente a dimostrare la completa omogeneità di un'estensione, e perciò — per l'assenza di differenze qualitative tra gli elementi – la relatività della posizione e l'assioma della congruenza. Questa deduzione verrà trattata diffusamente in seguito;[33] per il momento debbo solo notare che ogni estensione, in base a questo punto di vista, possiede tutte le proprietà (tranne le tre dimensioni) comuni agli spazi euclidei e non euclidei. Gli assiomi che esprimono tali proprietà, quindi, valgono per la forma dello spazio, e sono conseguenti soltanto all'omogeneità che Erdmann ammette quale principio (p. 171) di ogni teoria dello spazio. La distinzione di cui sopra tra forma e materia, corrisponde quindi, quando ne siano dedotte tutte le conseguenze, alla distinzione tra gli assiomi che conseguono

[32] *Ausdehnungslehre von 1844*, seconda edizione, pp. XXII, XXIII.
[33] V. par. 129 ss.

dall'omogeneità dello spazio, e quelli che non ne conseguono. Quindi, dato che l'omogeneità è equivalente alla relatività della posizione, e la relatività della posizione ha proprio la natura di una forma di esternalismo, parrebbe che la sua distinzione tra forma e materia possa anche venire estesa alla distinzione tra *a priori* ed empirico in geometria. Su questo argomento, avrò altro da aggiungere nel terzo capitolo.

Nel resto del capitolo, Erdmann insiste che la linea retta ecc., anche se non è astratta dall'esperienza, dove non si incontrano mai linee rette, pure, poiché si applica a scienze che per ammissione sono empiriche, deve essere empirica (p. 159) – un criterio che sembra impieghi soltanto quando manca ogni altro fondamento per un'opinione empirica e che, ovviamente, non può mai rifiutarsi di compiere il proprio dovere, dato che tutti gli elementi della conoscenza sono suscettibili di impiego su qualche materiale empirico. Inoltre, definisce la linea retta (p. 155) come una linea di curvatura costante zero, come se la curvatura potesse misurarsi indipendentemente dalla linea retta. Persino gli assiomi aritmetici sono dichiarati empirici (p. 165), dato che in un mondo dove le cose fossero tutte ineluttabilmente diverse l'una dall'altra, tali assiomi non potrebbero applicarsi. Dopo questo richiamo a Mill, non siamo sorpresi, qualche pagina dopo (p. 172), di un vago riferimento ai « logici inglesi » che hanno dimostrato che la geometria è una scienza induttiva. Cionostante, quasi all'ultima pagina del suo libro (p. 173) Erdmann dichiara che la geometria si distingue da tutte le altre scienze per l'omogeneità del suo materiale: un principio del quale non si trova una sola applicazione in tutto il libro, e che, come vedremo nel terzo capitolo, contraddice nettamente le teorie filosofiche sostenute in tutte le pagine precedenti.

Nell'insieme, quindi, non si può dire che Erdmann abbia fatto molto per consolidare la posizione filosofica di Riemann e di Helmholtz. L'ho criticato a fondo, perché il suo libro ha l'apparenza di una grande accuratezza e perché esso è senza dubbio la miglior difesa ancora esistente della posizione che assume. Adesso avremo da svolgere il compito opposto, quello di difendere la metageometria dal lato matematico, dagli attacchi di Lotze e degli altri, e di rivendicarle quella misura di importanza filosofica che pare realmente possieda – molto inferiore invero alle speranze di Erdmann.

Lotze.

85. La discussione di Lotze riguardo alla geometria[34] – che segue a una argomentazione metafisica relativa alla natura ontologica dello spazio, e presuppone i risultati di questa argomentazione – consiste di due parti: la prima discute i vari significati che si possono logicamente attribuire (pp. 233-247) alla proposizione che sono possibili altri spazi, diversi da quello di Euclide, e la seconda critica in dettaglio il procedimento della metageometria. La prima di queste questioni è molto importante, e richiede notevole attenzione quanto all'importanza logica di un giudizio sulla sua possibilità. Nonostante che la discussione di Lotze sia eccellente sotto molti aspetti, non riesco a persuadermi che abbia messo a fuoco l'unico vèro senso in cui sono possibili gli spazi non euclidei. Cercherò di giustificare questa affermazione nelle pagine che seguono.

86. Lotze inizia con una dichiarazione piuttosto sorprendente, che, anche se filosoficamente potrebbe essere vera, non pare sia storicamente fondata. La geometria euclidea, egli dice, è rimasta indebolita principalmente dalla nozione kantiana della esclusiva soggettività dello spazio – se lo spazio è soltanto la nostra personale forma di intuizione, della quale non esiste niente di analogo nel mondo oggettivo, esseri diversi possono avere spazi diversi, senza supporre che esista alcuna differenza nel mondo che adattano a quegli spazi (p. 233). Questa sembra certamente una deduzione legittima della soggettività dello spazio che, lungi dallo stabilire la validità universale di Euclide, ne stabilisce la validità solo dopo una ricerca empirica sulla natura dello spazio, secondo come viene intuito da Tom, Dick o Harry. Ma in realtà, quelli che hanno fatto di più per favorire la geometria non euclidea – ad eccezione di Riemann, che era un allievo di Herbart – di solito hanno ereditato da Newton un ingenuo realismo nei riguardi dello spazio assoluto. Potrei citare ad esempio il passaggio riportato da Bolyai nel primo capitolo, o Clifford, che pare abbia pensato che in realtà vediamo le immagini delle cose sulla retina[35] o ancora, la fede di Helmholtz nella dipendenza della geometria dal

[34] *Metaphysik*, libro II, cap. II. I miei riferimenti sono relativi all'originale.

[35] V. *Conferenze e saggi*, vol. I, p. 261.

comportamento dei corpi rigidi. Questa fede portò al punto di vista che la geometria, come la fisica, è una scienza sperimentale, nella quale si può raggiungere la verità oggettiva, è vero, ma solo con metodi empirici. Comunque il fondamento di Lotze per l'incertezza quanto a Euclide è un fondamento filosoficamente sostenibile, e sarà istruttivo notare le varie possibilità che ne derivano.

Se lo spazio è soltanto una forma soggettiva – così inizia l'argomentazione di Lotze – altri esseri possono avere una forma diversa. Se questo corrisponde a un mondo diverso, la differenza, dice, non presenta interesse: perché soltanto il nostro mondo è pertinente a qualsiasi discussione metafisica. Ma se questo spazio diverso corrisponde al medesimo mondo che conosciamo sotto la forma euclidea, allora, a suo parere, abbiamo una questione di genuino interesse filosofico. E qui, egli distingue due casi: *o* le relazioni tra le cose che si presentano a questi ipotetici esseri sotto la forma di un qualche spazio diverso, sono relazioni che non appaiono a noi, o ad ogni modo non ci appaiono come spaziali; *oppure* sono le stesse relazioni che appaiono a noi come figure nello spazio euclideo (p. 235). La prima possibilità verrebbe illustrata, dice, da esseri ai quali i molteplici del tono o del colore apparissero estesi; ma a suo parere non possiamo immaginare un molteplice, quale quello richiesto in questo caso, le cui dimensioni siano omogenee e paragonabili *inter se*, e quindi il contenuto delle varie rappresentazioni che costituiscono tale molteplice non potrebbe riunirsi in un unico contenuto che le contenesse tutte. Ma la possibilità di una combinazione del genere è l'essenza stessa di qualsiasi cosa che si possa definire spazio: perciò la prima delle possibilità di cui sopra è senza motivo e senza interesse. Ritengo che la conclusione di Lotze su questo punto sia innegabile, ma dubito che la sua argomentazione sia molto convincente. Comunque, dato che questa possibilità non ha relazione alcuna con quella contemplata dai non euclidei, non vale la pena di discuterla oltre.

Lotze ritiene che neanche la seconda possibilità sia quella della metageometria, ma in verità le si avvicini più di qualsiasi altra possibilità discussa. Se un non euclideo credesse nello stesso tempo alla soggettività dello spazio, dovrebbe convenire con questo punto di vista. Vediamo più esattamente qual è il punto di vista. Nel libro II, cap. I, Lotze accetta l'argomento dell'Estetica Trascendentale, ma respinge quello delle antinomie matematiche: decide che lo spazio è, come riteneva Kant, soggettivo, ma ciononostante possiede quello che Kant gli negava, un duplicato oggettivo. La relazione tra lo spazio presentato e il suo duplicato oggettivo, come la intende Lotze, è piuttosto difficile da capire. Pare che assomigli ben poco alla relazione tra la sensazione e il suo oggetto – per esempio tra la luce e le vibrazioni dell'etere – perché se così fosse, lo spazio non sarebbe soggettivo nel senso di individuale. Pare piuttosto che assomigli alla relazione tra la percezione del moto fisico e lo stato mentale della persona che vuole il moto. Comunque sia, si suppone che il duplicato oggettivo dello spazio consista di certe interazioni immediate delle monadi, che sperimentano le interazioni come modifiche della loro condizione interna. Tali interazioni, è chiaro, non formano l'argomento della geometria, che tratta solo delle percezioni delle figure spaziali che risultano a noi. Ora, se l'interpretazione dello spazio da parte di Lotze è giusta, pare non vi sia davvero alcun motivo perché queste percezioni risultanti non debbano essere molto diverse in esseri costituiti diversamente da noi per un'unica ed identica interazione tra le monadi. Ma se fossero diverse, dice Lotze, dovrebbero essere totalmente diverse, – diverse per esempio, come l'intervallo tra due note lo è da una linea retta. Quindi, a suo giudizio, esiste una possibilità circa la quale non possiamo saper nulla, e che rimarrà sempre una pura e vuota idea. Questo mi pare che vada troppo oltre: perché qualsiasi sia il duplicato oggettivo, ogni argomentazione che ce ne fornisce l'informazione, se la capovolgiamo, dovrà fornirci l'informazione di qualsiasi possibile forma di intuizione in cui viene presentato questo duplicato. L'argomentazione che ha usato Lotze nel capitolo precedente, per esempio, che dalla relatività della posizione, deduce la natura puramente relativa del duplicato oggettivo, ci permette, viceversa, di dedurre da tale natura relativa, l'assoluta relatività della posizione in qualsiasi intuizione possibile dello spazio, – a meno che, in verità, non comporti una relazione completamente ingannevole circa le interazioni delle monadi che ne formano il duplicato oggettivo. Ma la completa relatività della posizione, come cercherò di stabilire nel terzo capitolo, è sufficiente per dimostrare che la nostra geometria deve essere euclidea, ellittica, sferica o pseudo-sferica. Quindi, pare che abbiamo una conoscenza molto notevole, in base alla teoria dello spazio di Lotze, circa il modo in cui ciò che ci appare come spazio *deve*

apparire a qualsiasi essere che abbia le nostre stesse leggi di pensiero. È vero che non possiamo sapere quale teoria psicologica della percezione spaziale potrebbe valere per esseri del genere: potrebbero avere qualche senso diverso da quelli nostri, e potrebbero non avere nessun senso che somigli in qualche modo ai nostri, eppure la loro geometria avrebbe punti di somiglianza con la nostra, come quella del cieco coincide con quella di chi ci vede. In breve, se lo spazio ha un duplicato oggettivo, e se è possibile qualche deduzione, come Lotze sostiene che avvenga, dalla quale risalire dallo spazio al duplicato, allora è possibile anche il processo contrario, anche se può fornire soltanto qualcuna delle qualità dello spazio euclideo, dato che solo per qualcuna di queste qualità si può riscontrare che abbia un necessario analogo nel duplicato.

87. Ammettendo quindi la soggettività dello spazio, nel senso di Lotze, la possibilità di cui sopra non pare tanto vuota come immagina lui. Tuttavia egli la discute brevemente, per passare a quello che considera il reale significato della metageometria. In questo, è colpevole di un errore matematico che origina molte elucubrazioni senza importanza. Perché ritiene che la metageometria costruisca lo spazio da linee rette ed angoli, simili sotto tutti gli aspetti a quelli di Euclide, dai quali trae una facile vittoria dimostrando che questi elementi possono condurre soltanto a quell'unico spazio. In questo, è stato tratto in inganno tanto dalla fraseologia dei non euclidei, come dalla separazione di Euclide tra definizioni ed assiomi. Perché il fatto è, naturalmente, che le linee rette vengono definite interamente soltanto quando aggiungiamo alla definizione formale gli assiomi della linea retta e delle parallele. Entro lo spazio euclideo, la definizione di Euclide è sufficiente per distinguere la linea retta da tutte le altre curve; i due assiomi cui ci si è riferiti vengono quindi assorbiti nella definizione di spazio. Ma se escludiamo la limitazione allo spazio euclideo, la definizione deve essere accompagnata dai due assiomi, perché possa determinare completamente la linea retta euclidea. Così Lotze ha frainteso il significato delle costruzioni non euclidee, e chiaramente non ha afferrato l'essenziale, nel discutere come fa. La possibilità contemplata da un non euclideo, se rientrasse in uno dei casi di Lotze, ricadrebbe sotto il secondo caso discusso sopra.

88. Ma in realtà ritengo che il significato della metageometria sia diverso da qualsiasi cosa pensasse Lotze; e dato che pochi scrittori paiono chiari su questo punto, mi spingerò piuttosto addentro in quello che ritengo sia il suo scopo.

In primo luogo, vi sono alcuni scrittori — specialmente Clifford — che essendo ingenui realisti riguardo allo spazio, sostengono che le nostre prove sono totalmente insufficienti, finora, per decidere circa la sua natura nell'infinito o nell'infinitesimale (v. *Essays*, vol. I, p. 320); questi scrittori non sono interessati ad una qualche possibilità di esseri diversi da noi, ma semplicemente allo spazio quotidiano che conosciamo, che investigano con l'atteggiamento di un chimico che discuta se l'idrogeno è un metallo, o di un astronomo che discuta l'ipotesi nebulare.

Ma essi sono una minoranza: la maggior parte, più prudente, ammette che il nostro spazio per quanto si estenda l'osservazione, è euclideo, e se non proprio euclideo, deve essere solo leggermente sferico o pseudo-sferico. E qui ancora, è lo spazio della vita quotidiana che è in discussione, e inoltre qui, la discussione ritengo sia indipendente da qualsiasi assunto filosofico circa la natura della nostra intuizione dello spazio. Perché anche se questa è puramente soggettiva, la traduzione dell'intuizione in un concetto può venire effettuata solo approssimativamente, nell'ambito degli errori di osservazione probabili nell'auto-analisi; e finché l'intuizione dello spazio non è diventata un concetto, non abbiamo geometria scientifica. La certezza apodittica dell'assioma delle parallele si riduce a una convinzione soggettiva immotivata, e svanisce del tutto in coloro che nutrono dubbi non euclidei. Per rafforzare la fede euclidea, adesso si deve portare la ragione in aiuto dell'intuizione; ma disgraziatamente la ragione ci abbandona, siamo lasciati alla mercé delle osservazioni approssimate dei triangoli stellari — misero sostegno, in verità, della religione amata nella nostra infanzia.

89. Ma la possibilità di un'inesattezza tanto lieve che i nostri strumenti più precisi e le nostre parallassi più distanti non ne mostrano traccia, non turberebbe la mente degli uomini più dell'analoga possibilità di un'inesattezza nella legge di gravitazione, se non fosse per l'importanza filosofica della benché minima possibilità in questo campo. E ritengo che sia soltanto il significato filosofico della metageometria, a costituirne la reale importanza. Anche se, come supporremo per il

momento, l'osservazione avesse stabilito al di là di ogni possibile dubbio, che il nostro spazio può tranquillamente venire considerato come euclideo, la metageometria avrebbe ancora dimostrato una possibilità filosofica, e in base a questo solo fondamento, ritengo che potrebbe rivendicare quasi tutta l'attenzione che attualmente merita.

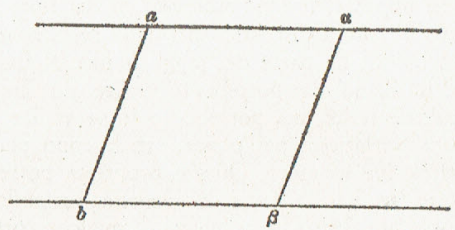
Ma quale è questa possibilità? Secondo Bradley (*Logica*, p. 187) una cosa è possibile quando segue da un certo numero di condizioni, alcune delle quali si sa che sono realizzate. Ora, le condizioni che deve rispettare una forma di esternalismo affinché possa affermarsi che esiste sono: primo, naturalmente, che venga sperimentata o legittimamente dedotta da qualcosa di sperimentato; ma, secondo, che sia conforme ad alcune condizioni logiche specificate nel terzo capitolo, che possono venire riassunte nella relatività della posizione. Ora, ciò che ha fatto la metageometria, in ogni caso, è stato di suggerire la prova che la seconda di queste condizioni viene rispettata dagli spazi non euclidei. Quindi Euclide viene affermato sulla base della sola esperienza immediata, e la sua verità, dato che non è mediata dalla necessità logica, è puramente assertoria o se lo preferiamo, empirica. Mi sembra che questo sia il senso più importante in cui sono possibili spazi non euclidei. In breve, essi sono il gradino di una argomentazione filosofica, piuttosto che di una ricerca di fatto: gettano luce sulla natura delle basi di Euclide, piuttosto che sulla effettiva conformazione dello spazio.[36] Questo significato della metageometria viene negato da Lotze, sul fondamento che la logica non euclidea è errata, un fondamento che egli cerca di rendere valido con molti dettagli e in molte pagine — vedremo adesso con quale successo.

90. L'attacco di Lotze alla metageometria – nonostante rimanga, per quanto mi risulta, la migliore critica contraria esistente, e nonostante le sue argomentazioni siano diventate parte della mercanzia che smerciano i filosofi euclidei – se non mi sbaglio, contiene molti equivoci dovuti all'insufficiente conoscenza matematica dell'argomento. Dato che tali equivoci si sono diffusi largamente tra i filosofi, e non possono venire eliminati facilmente, tranne che da parte di un critico che abbia approfondito la geometria non euclidea con molta attenzione,

[36] Sul significato della possibilità geometrica, cfr. Veronese, *Grundzüge der Geometrie* (traduzione tedesca), pp. XI-XIII.

sembra opportuno discutere gli appunti di Lotze punto per punto.

91. La critica matematica inizia (par. 131) con una definizione che si dà per scontata delle linee rette parallele. Due linee rette $a\alpha$, $b\beta$ secondo questa definizione, sono parallele



quando, – a e b essendo punti arbitrari sulle due linee – se $a\alpha = b\beta$, si avrà $ab = \alpha\beta$, dove α e β sono altri due punti delle due linee rette rispettivamente. Questa definizione – che contiene l'assioma e la definizione di Euclide, combinati in forma molto utile e seducente – è naturalmente e completamente adatta alla geometria euclidea, e porta immediatamente a tutte le proposizioni di Euclide relative alle parallele. Ma forse è più leale seguire il metodo di Euclide; quando un assioma viene così nascosto in una definizione, potrebbe apparire, dato che si suppone che le definizioni siano arbitrarie, come se si fosse aggirato l'ostacolo, mentre in realtà, la possibilità delle parallele definite come sopra, comporta proprio il punto in questione, cioè il discusso assioma delle parallele. Perché ciò che afferma questo assioma è semplicemente l'esistenza di linee conformi alla definizione di Lotze. La deduzione delle proposizioni principali sulle parallele, che Lotze fa seguire alla definizione, è naturalmente un procedimento semplicissimo – un procedimento tuttavia, il cui primo gradino pone un interrogativo.

92. L'argomentazione successiva relativa all'apriorità della geometria euclidea, piuttosto stranamente, ha un significato esattamente opposto, nonostante sia molto in voga tra gli avversari della metageometria. La misurazione dei triangoli stellari, e tutti i tentativi del genere per ottenere la determinazione empirica della costante spaziale, secondo Lotze sono fuori bersaglio; perché se si osservasse un discostamento da due an-

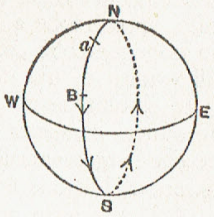
goli retti, o una parallasse annuale limitata per stelle lontane, ciò verrebbe attribuito a qualche nuovo tipo di rifrazione o, come nel caso dell'aberrazione, a qualche altra causa fisica, e mai alla natura geometrica dello spazio. Questo è un argomento robusto in favore della validità empirica di Euclide, ma quanto alla certezza apodittica del sistema ortodosso, esso ha una tendenza opposta. Perché osservazioni del tipo contemplato, sarebbero dovute a discostamenti dalla rettilinearità di Euclide, finora ignoti, da parte dei raggi di luce stellari. Tali discostamenti in alcuni casi potrebbero venire giustificati da una costante spaziale finita, ma potrebbero forse venire giustificati anche da una variazione nell'ottica, attribuendo per esempio, proprietà rifrattive all'etere. Queste proprietà potrebbero esistere soltanto se l'etere fosse di densità variabile, se (per esempio) fosse più denso in vicinanza di qualche corpo celeste. Ma ritengo che una supposizione del genere distruggerebbe l'utilità dell'etere per la fisica; una piccola alterazione della nostra geometria, tanto piccola da non influire apprezzabilmente sulle distanze entro il sistema solare, se errori del genere venissero mai scoperti, in definitiva rappresenterebbe probabilmente una spiegazione più semplice di quante potrebbe offrirne la fisica. Ma non è questo il punto che io metto in discussione. Il punto è che se nel caso di cui sopra fosse possibile una spiegazione fisica, come sostiene Lotze, deve esser vero anche il contrario: deve essere possibile spiegare i fenomeni attuali supponendo che l'etere sia rifrattivo e lo spazio non euclideo. Da questa conclusione non c'è via di scampo. Se ogni comportamento immaginabile dei raggi di luce si può spiegare nell'ambito di Euclide, per cause fisiche, deve essere possibile anche, con un'opportuna scelta di cause fisiche ipotetiche, spiegare i fenomeni reali come appartenenti a uno spazio non euclideo. Un'ipotesi del genere verrebbe giustamente respinta dalla scienza, per il momento, a causa della sua inutile complessità. Ciononostante, per la filosofia, essa rimarrebbe una possibilità da tener presente, e la scelta potrebbe effettuarsi soltanto su basi empiriche per semplicità. Può esser messo in dubbio che nel mondo che conosciamo, i fenomeni possano venire attribuiti a uno spazio chiaramente non euclideo, ma questa conclusione segue inevitabilmente l'affermazione che nessun fenomeno potrebbe obbligarci a presupporre uno spazio del genere. Quindi, l'argomentazione di Lotze, se viene ridimensionata, invalida il suo stesso punto di vista, e pone lo

spazio euclideo, quale spiegazione empirica dei fenomeni, allo stesso livello dell'etere luminifero.[37]

93. Lotze procede poi (par. 132) a una critica dettagliata di Helmholtz, che egli considera un tipico esponente della metageometria. È possibile che, al tempo in cui scriveva, Helmholtz occupasse realmente questa posizione; ma è una sfortuna che nelle menti dei filosofi, debba ancora continuare a occuparla, dopo i molti e sostanziali progressi raggiunti col trattamento proiettivo dell'argomento. È una sfortuna anche che i suoi poco accurati tentativi di render popolari i risultati matematici, siano stati tanto spesso liquidati senza la dovuta attenzione ai suoi contributi più tecnici e sostanziali. Così, i suoi racconti su Pianolandia e Sferolandia – che tutt'al più sono soltanto analogie sotto forma di fiaba di dubbio valore – sono stati attaccati come se rappresentassero un aspetto essenziale della metageometria.

Ma per scendere nei particolari: Lotze è pronto a concedere che gli abitanti di Pianolandia istituirebbero una geometria piana come quella che conosciamo noi, ma rifiuta di ammettere che gli abitanti di Sferolandia, senza dedurre una terza dimensione, potrebbero istituire una geometria sferica a due dimensioni esente da contraddizioni. Cercherò di fornire una libera interpretazione della discussione di Lotze su questo punto.

Supponiamo, dice, un polo nord e un polo sud N e S, fissati arbitrariamente, e un equatore EW. Supponiamo che un essere B, capace di ricevere impressioni soltanto dalle cose sulla superficie della sfera, si muova su un meridiano NBS. Facciamo partire B da un punto a e infine, dopo aver descritto un grande cerchio, facciamolo ritornare allo stesso punto a. Se a è noto soltanto per la qualità dell'impressione che dà a B, B può credere di non aver raggiunto lo stesso punto a, ma un altro punto simile a' che sta ad a in un rapporto simile a quello dell'ottava nel canto: potrebbe perfino non catalogare affatto le sue impressioni come spaziali. Perché questo possa



[37] Cfr. Calinon, *Sur l'indetermination geometrique de l'Univers*, « Revue Philosophique », 1893, vol. XXXVI, pp. 595-607.

verificarsi, abbiamo bisogno di un'ulteriore supposizione, che ogni differenza nelle sensazioni sopra indicate (quando descrive il meridiano) possa venire presentata come distanza spaziale tra due luoghi. Anche adesso, *B* può pensare che sta percorrendo una linea retta euclidea, che contiene punti simili a intervalli dati. Supponendo tuttavia, che si renda conto dell'identità di *a* con la sua posizione iniziale, adesso gli sembrerà di essere ritornato al punto dal quale era partito con un movimento in linea retta, perché il suo movimento, senza una terza dimensione, non può apparirgli altro che rettilineo.

Fino a questo punto, pare vi sia poco da obbiettare, tranne forse che per l'idea di una linea retta con punti simili periodici – se *B* fosse tanto filosofo come in queste discussioni di solito si suppone che sia, probabilmente avrebbe da obbiettare quanto a questa interpretazione delle sue esperienze, sulla base che considera lo spazio vuoto come qualcosa di indipendente dagli oggetti in esso contenuti. Vale anche la pena di sottolineare che *B* non avrebbe bisogno di descrivere l'intero cerchio, perché si trovi all'improvviso di nuovo a casa con i vecchi amici. Sarebbero sufficienti delle esatte misurazioni di piccoli triangoli per determinare la sua costante spaziale ed indicargli la lunghezza di un grande cerchio (o linea retta, come la chiamerebbe lui). Dobbiamo anche ammettere che un essere ipotetico del genere di *B*, potrebbe non formarsi per niente un'intuizione spaziale, ma poiché è stato presentato unicamente ai fini dell'analogia, è opportuno concedergli ogni requisito possibile nella sua situazione. Ma questi punti non toccano il nocciolo della questione, che sta nell'affermazione che una linea retta del genere, che torna su se stessa dopo un tempo finito, apparirebbe a *B* una « insopportabile contraddizione», e lo obbligherebbe così, per fini logici anche se non sensoriali, all'assunto di una terza dimensione. Questa affermazione mi pare assolutamente ingiustificata: tutta la metageometria sta in schiera compatta a dimostrare il contrario. Bisogna ricordare che l'argomentazione di Helmholtz è soltanto un'analogia, e la contraddizione esisterebbe *soltanto* per un euclideo.

Abbiamo visto nel primo capitolo che è stata sviluppata una geometria completa a *tre* dimensioni, in base alla supposizione che le linee rette abbiano una lunghezza finita. Un valore *costante* della misura della curvatura, come ha dimostrato la discussione su Riemann, non comporta né riferimento alla quarta dimensione, né nessun tipo di contraddizione interna.

Questo fatto invalida la contestazione di Lotze, che sorge unicamente dall'incapacità di spogliare la sua immaginazione dei panni euclidei.

Lotze attacca poi Helmholtz per la sua affermazione che *B* non saprebbe nulla delle linee parallele – linee *rette* parallele, intendeva dire, come risulta dal contesto.[38] Tuttavia Lotze lo interpreta come se volesse apparentemente significare semplici curve di distanza costante da una data linea retta, che sono parte della normale mercanzia della metageometria. I paralleli di latitudine, nel senso geografico, – ad eccezione dell'equatore – non apparirebbero come linee rette a *B*, ma come cerchi. Lui *definirebbe* diritti dei *grandi* cerchi, e questo fatto pare abbia indotto erroneamente Lotze a pensare che *tutti* i cerchi dovessero considerarsi linee rette. Quindi i paralleli di latitudine, anche se *B* li chiamasse paralleli, non invaliderebbero la contestazione di Helmholtz, che vale solo per le linee rette.

L'argomentazione che tali piccoli cerchi sarebbero paralleli, che abbiamo appena liquidato, è soltanto l'introduzione a un'altra prova che *B* avrebbe bisogno di una terza dimensione. Chiamiamo due di quei paralleli di latitudine l_n e l_s e supponiamo che siano equidistanti dall'equatore, uno nell'emisfero nord, uno nell'emisfero sud. I piani tangenti consecutivi lungo questi paralleli convergeranno nel primo caso verso nord, nel secondo caso verso sud. *B*, dice Lotze, potrebbe rendersi conto della loro differenza, o no. Nel primo caso, che considera come il più probabile, dimostra facilmente che *B*, dedurrebbe una terza dimensione. Ma ritengo che questa alternativa sia assolutamente inammissibile. I piani tangenti, come ogni piano euclideo in generale, non avrebbero alcun significato per *B*, tranne che in effetti non fosse un metageometra, il che, con ogni sottigliezza metafisica e matematica, l'argomentazione suppone che non sia – e Lotze è certamente l'ultima persona che avrebbe diritto di obbiettare a una supposizione del genere. Il tentativo di Lotze, di dimostrare che questa è la giusta alternativa, poggia, se ho capito bene, su un ridicolo errore

[38] *Vorträge und Reden*, vol. II, p. 9: « Parallele Linien wurden die Bewohner der Kugel gar nicht kennen. Sie wurden behaupten, dass jede beliebige zwei *geradeste* Linien, gehorig verlangert, sich schliesslich nicht nur in einem, sondern in zwei Punkten schneiden mussten » (il corsivo è mio). L'omissione di *retta* in queste frasi è una dimenticanza frequente nei matematici.

riguardo alla geometria sferica ordinaria. Egli afferma che *B* noterebbe che i meridiani formano angoli più piccoli col suo percorso verso il polo più vicino, che non verso il polo più lontano – in realtà sarebbero semplicemente perpendicolari al suo percorso nelle due direzioni. Forse ciò che intende Lotze è che tutti i meridiani si incontrano prima in una direzione che nell'altra, e questo naturalmente è vero. Ma i poli, in cui si incontrano i meridiani, apparirebbero a *B* come i centri dei rispettivi paralleli, mentre i paralleli stessi apparirebbero come cerchi. Ora non riesco a vedere quale difficoltà potrebbe sorgere per *B*, nel supporre che due cerchi diversi abbiano centri diversi.[39] Quindi dobbiamo accettare la prima alternativa, che *B* non avrebbe alcun tipo di conoscenza circa la direzione in cui convergono i piani tangenti. Qui, se non ho preso un abbaglio, Lotze cerca di dimostrare una *reductio ad absurdum*: dice che *B* penserebbe di star descrivendo due percorsi entrambi nella stessa direzione, e poi *potrebbe* considerarli entrambi come cerchi in un piano. Si può notare che la direzione, se si applica a un cerchio nel suo insieme, è senza significato; in effetti la direzione, in tutta la metageometria, anche quando viene applicata a delle linee rette, può significare soltanto direzione verso un punto. Parlare di due linee che non si incontrano, dicendo che hanno la stessa direzione, significa introdurre furtivamente l'assioma delle parallele. A parte questo, non riesco a immaginare nessuna obbiezione da parte di *B* a un punto di vista del genere, – anzi direi che *deve*, non *potrebbe*. Perciò l'intera argomentazione, a meno che la sua oscurità mi abbia portato fuori strada, deve dichiarsi sterile e inconcludente.

94. Dopo questa discussione preliminare su Sferolandia, Lotze passa alla questione di una quarta dimensione, e da lì allo spazio sferico o pseudo sferico. Come in precedenza, pare che conosca soltanto le espressioni meno accurate e più popolari di Helmholtz e Riemann, e che non si sia preso nessun disturbo per capire almeno i fondamenti della metageometria matematica. Per questa negligenza, molto di ciò che dice perde interamente di valore. Tanto per cominciare, ritiene che lo scopo della fiaba di Helmholtz sia quello di suggerire la possibilità

[39] Mi è stato suggerito che Lotze considera i meridiani proiettati su un piano, come in una carta geografica. Se è così c'è una introduzione illegittima della terza dimensione.

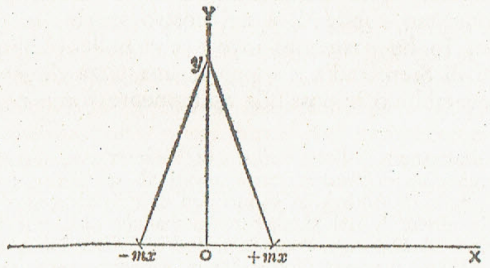
di una quarta dimensione, mentre il vero scopo era proprio quello opposto – rendere comprensibile uno spazio non euclideo puramente tri-dimensionale. Helmholtz introduce Pianolandia solo perché la sua relazione rispetto a Sferolandia è analoga a quella tra il nostro spazio e quello sferico.[40] Ma Lotze dice: gli abitanti di Pianolandia non troverebbero difficoltà in una terza dimensione, dato che non contraddirebbe in alcun modo la loro geometria, mentre gli abitanti di Sferolandia, a causa delle contraddizioni nel loro sistema bi-dimensionale vi sarebbero già stati indotti. Ho già cercato di rispondere alla seconda di queste affermazioni; la prima ha un suono strano, se si tiene conto del tentativo, poche pagine dopo, di dimostrare *a priori* che ogni forma di intuizione, analoga in qualche modo allo spazio, *deve* avere tre dimensioni. Non si può fare a meno di sospettare che gli abitanti di Pianolandia, con due dimensioni invece di tre, farebbero un tentativo del genere. Ma per ritornare all'argomentazione di Lotze. Non si può usare nessuna delle due analogie, dice, per dimostrare che forse dovremmo istituire una quarta dimensione, dato che per noi non esiste contraddizione, né fenomeni altrimenti inspiegabili. Per quanto ne so, le uniche persone che hanno usato questa analogia sono il Dr. Abbot e pochi Spiritisti – il primo per scherzo, i secondi per spiegare alcuni fenomeni che forse sono stati spiegati più semplicemente da Maskelyne e Cooke. Ma anche se la conclusione di Lotze a questo proposito è valida, una conclusione con la quale Helmholtz avrebbe potuto esser d'accordo, le sue argomentazioni, a mio avviso, sono poco rilevanti e poco convincenti. Esiste questa differenza, dice, tra noi e gli abitanti di Sferolandia: i secondi erano logicamente obbligati a una nuova dimensione, e la trovarono possibile; noi non ci siamo obbligati, e nel nostro spazio, la troviamo impossibile. Io ho sostenuto invece che nulla obbligherebbe gli abitanti di Sferolandia a supporre una terza dimensione, e anzi la troverebbero impossibile esattamente come noi trovia-

[40] Ciò è dimostrato dall'osservazione di Helmholtz al termine di un dettagliato tentativo di rendere immaginabili gli spazi sferici e pseudo sferici (*l. c.*, p. 28) « Anders ist es mit den drei Dimensionen des Raumes. Da alle unsere Mittel sinnlicher Anschauung sich nur auf einen Raum von drei Dimensionen, erstrecken, und die vierte Dimension nicht bloss eine Abänderung von Vorhandenem sondern etwas volkommen neues wäre, so befinden wir uns schon wegen unserer körperlichen Organization in der absoluten Unmöglichkeit, uns eine Anschauungsweise einer vierten Dimension vorzustellen ».

mo impossibile la quarta — vale a dire non logicamente, ma solo come costruzione presentabile nello spazio dato.

Dopo un esempio di umorismo un po' elefantino relativo a delle balene socialiste in un mare quadrimensionale dell'*eau sucré* di Fourier, Lotze continua con una dimostrazione, per logica, che ogni forma di intuizione che abbracci l'intero sistema delle relazioni ordinate di un molteplice coesistente, *deve* avere tre dimensioni. Si potrebbe obbiettare, su un fondamento *a priori*, contro qualsiasi tentativo del genere: si riterrebbe che ciò che appartiene all'intuizione pura difficilmente potrebbe venire determinato da un ragionamento *a priori*.[41] Tuttavia, non intendo qui sviluppare questo argomento, ma cercherò di far rilevare, per quanto lo permetterà la sua oscurità, l'errore specifico della dimostrazione in questione.

L'argomentazione di Lotze è la seguente. In questa discussione, anche se la nostra terminologia è necessariamente tratta dallo spazio, in realtà ci occupiamo di un concetto molto più generale. Supponiamo, per poter conservare l'omogeneità delle dimensioni, che la differenza (distanza) tra due elementi qualsiasi (punti) del nostro molteplice – per prendere a prestito il termine di Riemann – sia dello stesso tipo e commensurabile alla differenza tra altri due elementi qualsiasi. Prendiamo una serie di elementi a distanze successive x tali che la distanza tra due qualsiasi di essi sia la somma delle distanze tra gli elementi intermedi. Una serie del genere corrisponde a una linea retta, che si prende come l'asse delle x. Quindi si definisce una serie OY perpendicolare all'asse delle x OX quando le distanze di tutti gli elementi y su OY da $+mx$ e $-mx$ sono eguali. Secondo la nostra ipotesi, tali distanze sono confrontabi-



[41] V. Grassman, *Ausdehnungslehre von 1844*, seconda edizione, p. XXIII.

li e qualitativamente simili a x e y. Fintantoché OY viene definito soltanto in relazione a OX, esso è concettualmente unico. Ma supponiamo adesso che la medesima relazione tra OX e OY sia possibile tra OY e una nuova serie OZ; otteniamo allora una terza serie OZ, perpendicolare a OY e ancora concettualmente unica, fintantoché viene definita a mezzo della sola relazione con OY. Potremmo proseguire nello stesso modo, a una quarta linea OU, perpendicolare a OZ. Ma ai nostri fini, è necessario che OZ sia perpendicolare a OX come a OY. Senza questa condizione, OZ potrebbe estendersi in un altro mondo, e non avere nessuna relazione corrispondente con OX — questa è una possibilità esclusa soltanto dalle nostre inevitabili immagini spaziali. A questo punto giungiamo al nocciolo dell'argomentazione. OZ, dice Lotze, che oltre ad essere perpendicolare a OY, è perpendicolare anche a OX, deve essere compreso nelle serie di OY, perché queste sono state definite soltanto per la perpendicolarità rispetto a OX. Perciò, conclude, può esservi soltanto ancora una terza dimensione, se OZ coincide con uno, e — non appena si consideri fisso OX – uno *soltanto* dei molti membri della serie OY.

A questo argomento è difficile, per lo meno per me – attribuire validità alcuna. L'unico modo in cui posso giustificarlo è di supporre che Lotze abbia trascurato la possibilità di infiniti che non siano unici. In base a questa interpretazione, l'argomento potrebbe essere enunciato così: vi è una serie infinita di OY continuamente varianti; alla proprietà comune ad essi, aggiungiamo un'altra proprietà che ne divida il numero totale all'infinito. Il rimanente OZ, quindi, sarà determinato unicamente. Lo stesso tipo di argomentazione comunque, dimostrerebbe che due superfici possono incontrarsi reciprocamente in un solo punto, e innumerevoli altre assurdità. Il fatto è che gli infiniti possono essere di ordini diversi. Per esempio, il numero dei punti su una linea può considerarsi un singolo infinito, come il numero delle linee che passano per un punto in un piano; perciò per moltiplicazione, il numero dei punti di un piano è un doppio infinito, ∞^2, e se dividiamo questo numero per un infinito singolo, otteniamo ancora un numero infinito. Così l'argomentazione di Lotze presuppone ciò che deve dimostrare, che il numero delle linee perpendicolari a una linea data, in qualsiasi punto, è un infinito singolo, il che equivale all'assioma delle tre dimensioni. L'intero pas-

saggio è talmente oscuro che il suo significato può essermi sfuggito. Tuttavia è ovvio *a priori* come ho fatto rilevare all'inizio, che qualsiasi dimostrazione dell'assioma deve essere errata in qualche dettaglio, e l'interpretazione che ho fornito sopra è l'unica che sono stato capace di trovare.

95. La parte rimanente del capitolo viene dedicata a un attacco dello spazio sferico e pseudo sferico, sulla base che essi interferiscono con l'omogeneità delle tre dimensioni, e con la somiglianza di tutte le parti dello spazio. Questo è semplicemente falso. Tali spazi, come la superficie di una sfera, *sono* esattamente eguali per tutta la loro estensione. Lotze dimostra, qui e altrove, che non si è preso pena di scoprire cosa sia in realtà la metageometria. Per conto mio sostengo, e ho cercato di dimostrarlo in questo saggio, che la congruenza è un assioma *a priori*, senza il quale la geometria sarebbe impossibile; ma Lotze avrebbe dovuto sapere che è proprio il desiderio di sostenere questo assioma, che ha indotto la metageometria a limitarsi a spazi di misura della curvatura costante. Vediamo qui l'importanza di distinguere tra Helmholtz il filosofo ed Helmholtz il matematico. Anche se il filosofo avrebbe voluto fare a meno della congruenza, il matematico, come abbiamo visto nel primo capitolo l'ha mantenuta e le ha dato grande importanza. Un po' più avanti Lotze dimostra ancora come sia stato indotto in errore dalla sfortunata analogia di Sferolandia. Una *superficie* sferica, dice, la può capire; ma come dobbiamo passare da questa a uno spazio sferico? O questa superficie è tutto il nostro spazio, come a Sferolandia, o essa genera lo spazio con un raggio gradualmente crescente. Sfere concentriche del genere, come nota Lotze trionfante, generano naturalmente lo spazio euclideo. La sua separazione tuttavia è totalmente e completamente falsa, e non avrebbe mai potuto venir suggerita da chiunque avesse anche una conoscenza superficiale della metageometria. Questo punto è meno elaborato del primo, che viene riaffermato in tutta la sua nudità nell'ultima frase del capitolo: « Non riesco a persuadermi che senza gli elementi dello spazio omogeneo, si possa concepire o definire la presentazione di spazi eterogenei, o tali da avere misure di curvatura variabile ». Come se i matematici non euclidei avessero mai sostenuto spazi del genere!

In conclusione, Lotze esprime la speranza che la filosofia, su questo punto, non si lascerà ingannare dalla matematica. Al contrario, devo rallegrarmi che la matematica non sia stata

ingannata dalla filosofia, ed abbia sviluppato liberamente un sistema importante e coerente a se stesso, che per la sua sottile analisi degli elementi logici e reali, merita la gratitudine di tutti coloro che cercano una filosofia dello spazio.

96. Le obbiezioni alla geometria non euclidea che abbiamo appena discusso, rientrano in quattro categorie:

I. Gli spazi non euclidei non sono omogenei; quindi la metageometria materializza indebitamente lo spazio.

II. Essi comportano un riferimento alla quarta dimensione.

III. Non possono venire affermati senza un riferimento implicito allo spazio euclideo, o alla linea retta euclidea, da cui quindi dipendono.

IV. Sono auto-contraddittori per una o più ragioni.

Il lettore che mi ha seguito nel ritenere queste quattro obbiezioni errate, non avrà difficoltà a liquidare qualsiasi altra critica della metageometria, perché questi, per quanto mi risulta, sono gli unici argomenti matematici mai addotti contro i non euclidei.[42] La validità logica della metageometria, e la possibilità matematica di spazi non euclidei a tre dimensioni, verrà quindi ritenuta, in tutta la parte rimanente dell'opera, sufficientemente determinata.

97. In effetti, contro la metageometria possono venire sollevate due altre obbiezioni, ma esse sono di portata filosofica piuttosto che strettamente matematica. La prima di esse, che ha rappresentato la base delle operazioni per Delboeuf, vale egualmente per tutti gli spazi non euclidei. La seconda, che per quanto ne so, non è stata molto impiegata, ma mi sembra che meriti attenzione, è rivolta direttamente solo contro gli spazi di curvatura positiva; ma se avesse la forza di gettare discredito su questi, potrebbe mettere sotto accusa il metodo col quale tutti vengono egualmente ottenuti.

Le due obbiezioni sono:

I. Lo spazio deve essere tale da permettere la similitudine, cioè l'aumento o la diminuzione in rapporto costante, di tutte le linee di una figura, senza cambiarne gli angoli, mentre negli

[42] V. specialmente Stallo, *Concetti della fisica moderna*, « International Science Series », vol. XLII cap. XIII e XIV; Renouvier, *Philosophie de la regle du compas*, « Année Philosophique », II; Delboeuf, *L'ancienne et les nouvelles geometries*, « Revue Philosophique », voll. XXXVI-XXXIX.

spazi non euclidei, le linee come gli angoli, hanno grandezza assoluta.

II. Lo spazio deve essere infinito, mentre gli spazi sferici ed ellittici sono finiti.

Discuterò la prima obbiezione in rapporto agli articoli di Delboeuf cui si fa cenno sopra. La seconda, che a quanto so, non è stata largamente usata dalla critica, sarà meglio rimandarla al terzo capitolo.

Delboeuf.

98. I quattro articoli di M. Delboeuf sulla « Revue Philosophique » contengono molto materiale che è stato già trattato nella critica di Lotze, ed altro che non è pertinente alla nostra attuale discussione. L'unico punto che desidero discutere qui, è la questione della grandezza assoluta, come viene chiamata – cioè la questione se può essere conosciuta *a priori* la possibilità di figure geometriche simili ma non eguali.[43]

Nel discutere questa questione è importante, tanto per cominciare, distinguere chiaramente il senso in cui *è* richiesta la grandezza assoluta nella geometria non euclidea, da un altro senso in cui sarebbe assurdo considerare assoluta qualsiasi grandezza. I giudizi sulla grandezza possono derivare solo dalla comparazione, e se la metageometria richiedesse grandezze che possono venire determinate senza comparazione, meriterebbe certo d'essere condannata. Ma essa non le richiede. Tutto ciò che si richiede è che sia impossibile variare la grandezza di una figura, a paragone di altre figure, mentre il resto dello spazio non subisce variazioni, e lasciando le grandezze relative interne delle sue parti invariate. Questa costruzione che è possibile in Euclide, nella metageometria è impossibile. Dobbiamo discutere se questa impossibilità rende gli spazi non euclidei logicamente errati.

La posizione di M. Delboeuf circa questo assioma – che definisce il postulato di omogeneità [44] – è che tutta la geometria deve presupporlo e che conseguentemente la metageometria, anche se logicamente fondata, è logicamente conseguente a Euclide, e può effettuare le sue costruzioni soltanto entro uno spazio « omogeneo » euclideo. (« Rev. Phil. », vol. XXXVII, pp. 80-1). Sembra, ciononostante, che ritenga che l'omogeneità (nel senso da lui attribuito) venga appresa dall'esperienza, anche se su questo punto non è molto esplicito (vol. XXXVIII, p. 129). Ad ogni modo nei suoi articoli non viene fornita alcuna prova *a priori*. Chiunque ammetterebbe che quale risultato dell'esperienza, si sa che la similitudine è possibile entro i limiti dell'osservazione; ma il fatto che questa possibilità si estenda alle carte topografiche, che hanno a che fare con una superficie sferica, dovrebbe indurci alla cautela nel dedurre, da un dato del genere, la certezza di Euclide relativamente a spazi estesi. Inoltre, se l'omogeneità è empirica, la metageometria che ne fa a meno non si trova necessariamente in condizione di dipendenza *logica* da Euclide, dato che l'omogeneità e l'isogeneità sono logicamente separabili. Perciò, quale unica affermazione che può interessare la nostra discussione, supporrò che l'omogeneità venga considerata *a priori* e logicamente indispensabile alla geometria.

[43] Delboeuf ha avuto il merito di aver basato Euclide, fin dal 1860, nel suo *Prolegomenes Philosophiques de la Geometrie* su questo assioma – certamente una base migliore a prima vista, dell'assioma delle parallele.

[44] Questo significato dell'omogeneità non deve essere confuso col senso in cui ho usato io la parola. Nel senso di Delboeuf, significa che le figure possono essere simili anche se di dimensioni diverse; nel senso in cui l'ho usata io, significa che le figure possono essere simili anche se in luoghi diversi. Questa proprietà è chiamata *isogeneità* da Delboeuf.

99. Ora abbiamo visto, quando abbiamo discusso le opinioni di Erdmann circa il giudizio della quantità, che nello spazio non euclideo, come in quello euclideo, un cambiamento di tutte le grandezze spaziali in rapporto eguale, non sarebbe per niente un cambiamento; il rapporto di tutte le grandezze verso la costante spaziale rimarrebbe immutato, e la costante spaziale, quale standard decisivo di paragone, non si può affermare che abbia una grandezza specifica comprensibile in qualsiasi senso. Perciò le grandezze assolute della metageometria sono assolute soltanto nei confronti di un'altra grandezza *specifica*, non nei confronti delle altre grandezze in generale. Se le cose non stessero così, la natura comparativa del giudizio della grandezza verrebbe contraddetta, e la metageometria metrica diventerebbe un assurdo. Ma dato che è così, la differenza rispetto a Euclide consiste soltanto in questo: che nella metageometria abbiamo, e in Euclide no, uno standard di paragone comportato dalla natura del nostro spazio nel suo insieme, che si chiama la costante spaziale. Rimane da discutere se l'affermazione di uno standard del genere comporta una indebita materializzazione dello spazio.

Io non ritengo che sia così. Perché una indebita materializ-

zazione dello spazio sorgerebbe soltanto se non potessimo più considerare la posizione come interamente relativa, e definibile geometricamente soltanto discostandosi da altre posizioni. Ma la relatività della posizione, come abbiamo abbondantemente visto, viene mantenuta in tutti gli spazi di curvatura costante, – in tutti questi spazi, le posizioni possono venire definite, geometricamente, soltanto dalle relazioni rispetto ad altre posizioni.[45] Questa serie di definizioni può condurre a un regresso infinito, ma può anche creare un circolo vizioso, come nello spazio sferico, e tornare di nuovo alla posizione da cui era partita. Tale procedimento pare non comporti nessuna materializzazione dello spazio, nessuna esistenza indipendente di mere relazioni. In breve, tutta la metageometria è una dimostrazione che la relatività della posizione è compatibile con la grandezza assoluta, nell'unico senso richiesto dagli spazi non euclidei. Dobbiamo quindi concludere che non c'è nulla di incompatibile nel negare l'omogeneità (nel senso di Delboeuf) sia rispetto alla natura relativa dello spazio, che rispetto alla natura comparativa della grandezza. Quest'ultima obbiezione *a priori* nei riguardi della metageometria non può quindi venire sostenuta, e la questione deve essere decisa soltanto su basi empiriche.

100. I fondamenti della geometria sono stati argomento di molta speculazione di recente in Francia, e ciò pare richieda qualche attenzione. Ma nonostante lo splendido lavoro che hanno svolto i francesi sulla questione associata del numero e della quantità continua, non riesco a persuadermi che siano riusciti a far progredire molto l'argomento della filosofia geometrica. Gli scrittori più importanti dal punto di vista matematico, sono stati Calinon e Poincaré, da quello filosofico Renouvier e Delboeuf; e in mezzo tra matematica e filosofia c'è Lechalas.

Calinon, in un interessante articolo sulla indeterminatezza geometrica dell'universo, sostiene che al mondo reale può applicarsi qualsiasi geometria, con una opportuna ipotesi circa il corso dei raggi luminosi. Perché soltanto la terra ci è nota per tramiti diversi dall'ottica; e la terra è una parte infinitesimale dell'universo. Questa linea di argomentazione è stata già discussa relativamente a Lotze, ma Calinon aggiunge un nuovo suggerimento, che la costante spaziale forse può variare con il

[45] Per una dimostrazione completa di questa proposizione, v. cap. 3.

tempo. Ciò comporterebbe una relazione causale tra lo spazio e le altre cose, che pare difficilmente concepibile e che, se viene considerata possibile, deve certamente distruggere la geometria, perché la geometria dipende interamente dal fatto che è estranea alla causalità.[46] Inoltre, in tutte le operazioni di misurazione si impiega un po' di tempo; e se non sapessimo che lo spazio rimane immutato durante l'operazione, è difficile vedere come potremmo ottenere risultati degni di fede, o come potrebbe scoprirsi, conseguentemente, un cambiamento nel parametro. Infatti, sorgerebbero le stesse difficoltà di quelle che derivano dal supporre che lo spazio non è omogeneo.

Poincaré sostiene che la questione se si debba accettare Euclide o la metageometria, riguarda la convenienza e la convenzione, non la verità; gli assiomi sono definizioni camuffate, e la scelta tra le definizioni è arbitraria. Questo punto di vista è stato discusso nel primo capitolo, in relazione alla teoria della distanza di Cayley dalla quale dipende.

Lechalas è un filosofo allievo di Calinon. È un razionalista del tipo pre-kantiano, ma crede nella validità della metageometria. Sostiene che la geometria può fare a meno di tutti i postulati puramente spaziali, e può lavorare con i soli assiomi sulla grandezza,[47] che a suo avviso sono puramente analitici. Il principio di contraddizione, per lui, è l'unica e la sola prova della verità; facciamo lunghe catene di ragionamenti dalle nostre premesse, per vedere se vengono fuori contraddizioni. Si potrebbe obbiettare che questo punto di vista, anche se salva la geometria generale dall'essere logicamente empirica, la lascia soltanto empiricamente logica; infatti questo sarebbe il fato di ogni singola conoscenza *a priori*, se quella di Lechalas fosse l'unica prova della verità. Comunque, egli conclude che la geometria generale è apodittica, mentre lo spazio del nostro mondo reale è contingente, come tutti gli altri fenomeni.

Delboeuf critica lo spazio non euclideo da un punto di vista ultra-realista: sostiene che lo spazio *reale* non è né omogeneo né isogeneo, ma che lo spazio *immaginato*, astratto dallo spazio reale ha entrambe queste proprietà. Non fornisce alcuna giustificazione dello spazio reale, che pare venga mantenuto nel significato dell'ingenuo realismo, e neanche mostra come

[46] V. cap. 3, specialmente il par. 133.

[47] Per una critica di questo punto di vista, v. le discussioni più sopra su Riemann ed Erdmann.

ha acquisito l'intima conoscenza della sua costituzione.[48] I suoi argomenti contro la metageometria, per quanto non sono ripetizioni di Lotze, sono stati già discussi.

Renouvier, infine, è un kantiano puro, del tipo più ortodosso. Le sue opinioni circa l'importanza per la geometria, della distinzione tra i giudizi sintetico ed analitico, sono state discusse in relazione a Kant, all'inizio del presente capitolo.[49]

[48] Cfr. Couturat, *De l'Infini Mathematique*, Felix Alcan, Paris, 1896, p. 544.

[49] Segue una lista dei più importanti scritti filosofici francesi recenti sulla geometria, per quanto mi risulta.

Andrade: *Les bases experimentales de la geometrie euclidienne*, « Rev. Phil. », 1890, II e 1891, I.

Bonnel: *Les hypotheses dans la geometrie*, Gauther, Villars, 1897.

L'Abbé de Broglie: *La geometrie non euclidienne*, due articoli, « Annales de Phil. Chret. », 1890.

Calinon: *Les espaces geometriques*, « Rev. Phil. », 1891 e 1891, II. *Sur l'indetermination geometrique de l'univers, ib.*, 1893, II.

Couturat: *L'« Annee Philosophique » de F. Pillon*, « Rev. de Met. et de Morale », gennaio 1893. *Note sur la geometrie non euclidienne et la relativité de l'espace, ib.*, maggio 1893. *Etudes sur l'espace et le temps, ib.*, settembre 1896.

Delboeuf: *L'ancienne et les nouvelles geometries*, quattro articoli, « Rev. Phil. », 1893-5.

Lechalas: *La geometrie generale*, « Crit. phil. », 1889. *La geometrie generale et les jugements syntetiques a priori*, e *Les bases esperimentales de la geometrie* « Rev. Phil. », 1890, II. *M. Delboeuf et le probleme des mondes semblables, ib.*, 1894, I. *Note sur la Geometrie non euclidienne et le principe de similitude*, « Rev. de Met et de Morale », marzo 1893. *La courbure et la distance en geometrie generale, ib.*, marzo 1896. *La geometrie generale et l'intuition* « Annales de Phil. Chret. », 1890. *Etude sur l'espace et le temps*, Paris, Alcan, 1896.

Liard: *Des definitions geometriques et des definitions empiriques*, seconda ed., Paris, Alcan, 1888.

Mansion: *Premiers principes de la metageometrie*, due articoli sulla rivista « Neo-Scholastique », 1896. Pubblicati separatamente, Gauthier-Villars, 1896.

Milhaud: *La geometrie non euclidienne et la theorie de la connaissance*, « Rev. Phil. », 1888, I.

Poincaré: *Non Euclidian Geometry*, « Nature », vol. XLV, 1891, 2. *L'espace et la geometrie*, « Rev. de Met. et de Morale », novembre 1895. *Reponse a quelques critiques, ib.*, gennaio 1897.

Renouvier: *Philosophie de la regle et du compas*, « Crit. Phil. », 1889 e « Année Phil. », IIme annee, 1891.

Sorel: *Sur la geometrie non euclidienne*, « Rev. Phil. », 1891, I.

Tannery: *Theorie de la connaissance mathematique*, « Rev. Phil. », 1894. II.

101. Prima di iniziare l'argomentazione costruttiva del prossimo capitolo, cerchiamo di riassumere brevemente le teorie che sono state polemicamente chiamate in causa nel corso della critica che abbiamo appena terminato. Abbiamo convenuto di accettare, con Kant, la necessità dell'esperienza possibile quale prova dell'*a priori*, ma abbiamo rifiutato per il momento, di discutere la relazione tra *a priori* e soggettivo, ritenendo la prova puramente logica, sufficiente ai nostri fini immediati. Ci siamo anche rifiutati di attribuire importanza alla distinzione tra analitico e sintetico, dato che sembrava si applicasse non a giudizi diversi, ma soltanto ad aspetti diversi di uno stesso giudizio.

Poi abbiamo discusso il tentativo di Riemann di identificare l'elemento empirico nella geometria con l'elemento non deducibile dai concetti di grandezza; e abbiamo stabilito che tale identificazione era dovuta a una confusione circa la natura della grandezza. Perché, abbiamo detto, i giudizi sulla grandezza richiedono sempre una qualche base qualitativa, che non è quantitativamente esprimibile.

Nella critica di Helmholtz, abbiamo stabilito che la meccanica presuppone logicamente la geometria, anche se lo spazio presuppone la materia; ma che la materia che presuppone lo spazio, e alla quale indirettamente si riferisce la geometria, è una materia più astratta di quella della meccanica, una materia priva di attributi di forza e causali, e che possiede soltanto gli attributi puramente spaziali richiesti dalla possibilità delle figure spaziali. Ma abbiamo concesso che la geometria, applicata alla matematica mista o alla vita quotidiana, richiede più di questo, richiede infatti qualche mezzo per scoprire, nella materia più concreta della meccanica, un corpo rigido o un corpo il cui discostamento dalla rigidità segua qualche legge empiricamene determinabile. Quindi abbiamo convenuto di considerare empiriche le misurazioni *reali*.

Le nostre conclusioni per quanto riguarda l'empirismo di Riemann e di Helmholtz, sono state rafforzate da una critica di Erdmann. Quindi, ci è spettato il compito opposto, quello di difendere la metageometrica contro Lotze. Qui, abbiamo visto che vi sono due sensi in cui è possibile la metageometria. Il primo riguarda il nostro spazio reale ed asserisce che può avere una piccolissima costante spaziale; il secondo riguarda le teorie filosofiche dello spazio, ed afferma una possibilità puramente logica, che lascia la decisione all'esperienza. Abbiamo

anche visto che le obbiezioni matematiche di Lotze, derivavano da insufficiente conoscenza dell'argomento, e potevano tutte venire confutate con una migliore conoscenza della metageometria.

Infine, abbiamo discusso la questione della grandezza assoluta, ed abbiamo trovato che essa non è un ostacolo logico agli spazi non euclidei. Perciò la nostra conclusione, per quanto possiamo finora aver motivo di concludere, è che tutti gli spazi con una costante spaziale sono giustificabili *a priori*, e che la scelta tra essi deve essere opera dell'esperienza. Gli spazi privi di una costante spaziale, d'altra parte, che cioè non sono dappertutto omogenei, abbiamo trovato che sono logicamente infondati e impossibili da conoscere, e perciò vanno condannati *a priori*. La dimostrazione costruttiva di questa tesi formerà l'argomento del capitolo che segue.

3. [GLI ASSIOMI]

SEZIONE A. GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

102. La geometria proiettiva propriamente detta, come abbiamo visto nel primo capitolo, non impiega il concetto di grandezza e quindi non richiede gli assiomi che nei sistemi del secondo periodo o metrici, erano necessari solamente per rendere possibile l'applicazione della grandezza allo spazio. Ma abbiamo visto anche che la trasformazione di Cayley delle proprietà da metriche in proiettive, era puramente tecnica e filosoficamente senza importanza. Ora, è soltanto nelle proprietà metriche [1] – a parte l'eccezione relativa all'assioma della linea retta, che tuttavia presuppone in sé proprietà metriche – che differiscono gli spazi euclidei e non euclidei. Le proprietà che tratta la geometria proiettiva, quindi, in quanto sono ottenute senza l'uso degli immaginarî, sono proprietà comuni a tutti gli spazi. Infine, le differenze che compaiono tra le geometrie di spazi diversi della medesima curvatura – cioè tra le geometrie del piano e del cilindro – sono differenze di proprietà proiettive.[2] Così la necessità che sorge nella geometria metrica, di ulteriori qualificazioni oltre quelle della curvatura costante, scompare quando il nostro spazio viene definito da proprietà puramente proiettive.

103. Abbiamo buone ragioni per attenderci, quindi, che gli assiomi della geometria proiettiva saranno l'espressione più semplice e più completa dei requisiti indispensabili di ogni ragionamento geometrico; e questa aspettativa, spero, non verrà delusa. Verrà riscontrato, se non mi sbaglio, che la geometria

[1] V. Anche assioma della distanza, sezione B di questo capitolo.
[2] Così su un cilindro due geodetiche, cioè una generatrice ed una ellisse, possono avere un qualsiasi numero di intersezioni – una differenza molto importante rispetto al piano.

proiettiva, in quanto tratta soltanto delle proprietà comuni a tutti gli spazi, è interamente *a priori*, non prende nulla dall'esperienza, e, come l'aritmetica, ha per oggetto una creatura del puro intelletto. Se è così, si tratta del ramo della matematica pura di cui Grassmann nel suo *Ausdehnungslehre* del 1844 intuì la possibilità, cercando, con un brillante fallimento, di interpretarlo senza alcun richiamo allo spazio dell'intuizione.

104. Ma sfortunatamente, il compito di scoprire gli assiomi della geometria proiettiva è tutt'altro che facile. Finora, non hanno trovato nessun Riemann o nessun Helmholtz che li formulasse filosoficamente. Molti geometri hanno costruito dei sistemi che intendevano fossero, e che se interpretati con sufficiente attenzione, sono realmente, esenti da presupposti metrici. Ma questi presupposti sono tanto radicati in tutti gli elementi propri della geometria, che il compito di eliminarli richiede una ricostruzione dell'intero edificio geometrico. Così per esempio, Euclide tratta fin dall'inizio dell'eguaglianza spaziale – impiega il cerchio che viene necessariamente definito a mezzo dell'eguaglianza, e basa tutte le proposizioni successive sulla congruenza dei triangoli, come viene discussa nel Libro I.[3] Quindi, prima di poter usare qualsiasi proposizione elementare di Euclide, anche se questa esprime una proprietà proiettiva, dobbiamo dimostrare che la proprietà in questione può venir dedotta con metodi proiettivi. In generale, ciò non è stato fatto dai geometri proiettivi, che per esempio, troppo spesso hanno supposto che la costruzione quadrilatera, – con la quale, come abbiamo visto nel primo capitolo, introducono le coordinate proiettive – o il rapporto disarmonico, che *prima facie* è metrico, avrebbero potuto venir determinati soddisfacentemente in base ai loro principî. Comunque, tutti e due questi assunti possono essere giustificati, e possiamo quindi ammettere che le rivendicazioni della geometria proiettiva quanto all'indipendenza logica dalla misurazione o dalla congruenza, sono valide. Vediamo allora come prosegue.

105. In primo luogo, è importante rendersi conto che nella geometria proiettiva, quando si usano delle coordinate, non sono coordinate nel senso metrico normale, cioè misure numeriche di grandezze spaziali. Al contrario, sono una serie di numeri, assegnati arbitrariamente ma sistematicamente a punti diversi, come la numerazione degli edifici in una strada, e che da un punto di vista filosofico, servono soltanto come utili designazioni di punti che l'indagine desidera distinguere. Tuttavia, per la brevità dell'alfabeto, essi possono in effetti, venire sostituiti da lettere, come in Euclide. Come vengono introdotti e cosa significano, è stato discusso nel primo capitolo. Qui dobbiamo soltanto ripetere un avvertimento, che quando è stato trascurato ha portato a molti malintesi.

[3] V. Cremona, *Geometria Proiettiva* (Clarendon Press, 2ª ed., 1893) p. 40: « La maggior parte delle proposizioni negli elementi di Euclide sono metriche, e non è facile trovare tra esse un esempio di teorema puramente descrittivo ».

106. La distinzione tra punti diversi, quindi, non è il risultato, ma la condizione del sistema delle coordinate proiettive. Il sistema delle coordinate è un insieme di segni, completamente estraneo e semplicemente conveniente, che non tocca in alcun modo l'essenza della geometria proiettiva. Ciò da cui dobbiamo partire, in questo dominio, è la possibilità di distinguere varî punti l'uno dall'altro. Possiamo designare questo, insieme a Veronese, come il primo assioma della geometria.[4] Come definire un punto, e come distinguerlo da altri punti, per il momento non ha importanza; perché qui desideriamo soltanto scoprire la natura della geometria proiettiva, e il tipo di proprietà che impiega e dimostra. Come, e con quale giustificazione le usa e le dimostra, verrà discusso dopo.

107. Adesso, è ovvio che una mera collezione di punti, distinti l'uno dall'altro, non può fondare una geometria: dobbiamo avere qualche idea del modo in cui i punti stanno in relazione tra loro, perché si abbia un argomento adeguato da discutere. Ma dato che ogni idea che comporti la quantità viene esclusa, le relazioni tra i punti non possono essere relazioni di distanza nel senso ordinario, e neanche rapporti disarmonici nel senso della geometria ordinaria, perché i rapporti disarmonici vengono definiti di solito come i rapporti tra quattro distanze, o tra quattro seni, e sono perciò quantitativi. Ma dato che ogni rapporto quantitativo presuppone una identità di qualità, possiamo aspettarci di trovare, nella geometria proiettiva, il sostrato qualitativo della sovrastruttura metrica.

E come vedremo, si tratta proprio di questo. Non abbiamo distanza, ma *abbiamo* la linea retta; non abbiamo un rapporto

[4] *Op. cit.*, p. 226.

disarmonico quantitativo, ma *abbiamo* la proprietà, per quattro punti qualsiasi di una retta, di rappresentare le intersezioni con i raggi di una data raggiera. E da questa base, possiamo costruire una scienza qualitativa di esternalismo astratto, che è la geometria proiettiva. Passerò adesso a dimostrare come accade.

108. Ogni ragionamento geometrico, in ultima analisi, è circolare: se cominciamo col supporre dei punti, essi possono venire definiti soltanto dalle linee o dai piani ad essi relativi; e se cominciamo col supporre delle linee o dei piani, essi possono venire definiti soltanto a mezzo dei punti attraverso i quali passano. Questo è un cerchio inevitabile, il cui fondamento di necessità apparirà come procederemo. Quindi, è in qualche modo arbitrario cominciare dai punti o dalle linee, come illustra matematicamente il principio eminentemente proiettivo della dualità; tuttavia sceglieremo, come la maggior parte dei geometri, di partire dai punti.[5] Supponiamo quindi, quale dato, un insieme di punti discontinui, senza tener conto per il momento, delle relazioni esistenti tra loro. Ma dato che le relazioni sono indispensabili per qualsiasi ragionamento che li riguardi come sistema, per cominciare, introduciamo l'assioma della linea retta. Diremo che due di quei punti giacciono su una linea che ne viene definita interamente. Questa linea, essendo determinata dai due punti, può venire considerata come una relazione tra di essi, o un attributo del sistema che entrambi formano. Questo è il solo attributo puramente qualitativo – come verrà dimostrato in seguito – di un sistema di due punti. Ora, la geometria proiettiva può tener conto soltanto degli attributi qualitativi, e può distinguere tra punti diversi soltanto in base alle loro relazioni con altri punti, dato che tutti i punti, *per se*, sono qualitativamente simili. Da ciò deriva che, per la geometria proiettiva, quando siano dati solo due punti, essi sono qualitativamente indistinguibili da altri due punti qualsiasi sulla stessa linea retta, dato che gli altri due punti hanno la medesima relazione qualitativa. Reciprocamente, dato che una linea retta è una figura determinata da due qualsiasi dei suoi punti, e tutti i punti sono qualitativamente simili, ne consegue che tutte le linee rette sono qualitativamente simili. Quindi possiamo considerare che un punto

[5] Qualche fondamento per questa scelta apparirà quando giungeremo alla geometria metrica.

venga determinato da due linee rette che vi si incontrano, e il punto sotto questo aspetto, diventa l'unica relazione qualitativa tra le due linee rette. Perciò se è soltanto il punto a considerarsi dato, le due linee rette sono qualitativamente indistinguibili da qualsiasi altra coppia che passa per il punto.

109. L'estensione di questi due principî reciproci è l'essenza di tutte le trasformazioni proiettive, e in verità di tutta la geometria proiettiva. Le operazioni fondamentali a mezzo delle quali le figure vengono trasformate proiettivamente, si chiamano proiezione e sezione. Le varie forme di proiezione e di sezione vengono definite nella *Geometria proiettiva* di Cremona, cap. I, da cui riporto la seguente descrizione.

« *Proiettare da un punto fisso S* (il *centro della proiezione*) una figura (*ABCD...abcd...*) composta di punti e linee rette, significa costruire le linee rette, o *proiettare i raggi SA, SB, SC, SD* ... e i piani (*piani di proiezione*) *Sa, Sb, Sc, Sd* ... Otteniamo così una nuova figura composta di linee rette e piani che passano tutti per il centro *S*.

« *Tagliare con un dato piano* σ (*piano trasversale*) una figura (αβγδ...*abcd*...) costituita da piani e linee rette, significa costruire le linee rette o *tracce* σα, β, γ ... e i punti o *tracce* σ*a*, σ*b*, σ*c*...[6] Con questo mezzo otteniamo una nuova figura composta di linee rette e punti che giacciono sul piano σ.

« *Proiettare da una linea retta fissa s* (l'*asse*) una figura *ABCD* composta di punti, significa costruire i piani *sA, sB, sC*... La figura così ottenuta è composta di piani che passano tutti per l'asse *s*.

« *Tagliare con una linea retta fissa s* (una *trasversale*) una figura αβγδ... composta di piani, significa costruire i punti *s*α, *s*β, *s*γ... In questo modo otteniamo una nuova figura composta di punti che giacciono tutti sulla trasversale fissa *s*.

« Se una figura è composta di linee rette *a, b, c*... che passano tutte da un punto fisso o *centro S*, essa può venir *proiettata* da una linea retta o *asse s* che passa per *S*; risulterà una figura composta da piani *sa, sb, sc*...

« Se una figura è composta di linee rette *a, b, c*... che giacciono tutte su un dato piano, essa può venire tagliata da una linea retta (trasversale) *s*, giacente sullo stesso piano; ne ri-

[6] La linea retta σα denota la linea retta comune ai piani σ ed α; il punto σ*a* denota il punto comune al piano σ ed alla linea retta *a*; lo stesso vale per il resto della notazione.

sulta così una figura che è formata dai punti *sa, sb, sc...* ».

110. Si considera che l'applicazione successiva, a una figura, di due operazioni reciproche di proiezione e sezione, produca una figura proiettivamente indistinguibile dalla prima, con l'unica condizione che il numero di dimensioni della figura iniziale sia lo stesso di quelle della figura che ne risulta, per esempio, se la seconda operazione è una sezione a mezzo di un piano, la figura iniziale dovrà essere una figura piana. Le figure ottenute da una data figura per sola proiezione o sezione, stanno in relazione a quella figura, secondo il principio di dualità del quale dovremo parlare più avanti.

Io cercherò di dimostrare, in ciò che segue, primo, in che senso le figure ottenute l'una dall'altra per trasformazione proiettiva sono qualitativamente simili; secondo, quali assiomi, o attributi dello spazio, sono comportati dal principio della trasformazione proiettiva; e terzo, che questi attributi debbono appartenere a una forma di esternalismo a più di una dimensione, e rappresentano quindi proprietà *a priori* di ogni spazio possibile.

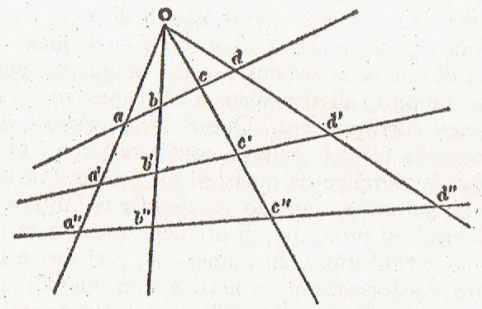
Per amore di semplicità, mi limiterò in generale a due dimensioni. Così facendo, non introdurrò alcuna differenza di principio importante, e semplificherò enormemente la matematica necessaria.

111. Le due cose matematicamente fondamentali nella geometria proiettiva sono il rapporto disarmonico e la costruzione quadrilatera. Ogni altra cosa segue matematicamente da queste due. Ora, cosa si intende, nella geometria proiettiva, per rapporto disarmonico?

Se iniziamo dal rapporto disarmonico come viene definito comunemente, ci troviamo di fronte alla difficoltà della sua natura quantitativa.[7] Ma tra le proprietà dedotte da questa definizione, molte, se non la maggior parte, sono puramente qualitative. La più importante di esse è che, se per quattro punti su una linea retta tiriamo quattro linee rette che si incontrano in un punto, e se poi tiriamo una nuova linea retta che incontra le quattro di prima, i quattro nuovi punti di intersezione hanno lo stesso rapporto anarmonico dei quattro punti dai

[7] Cremona, *Op. cit.*, cap. IX, p. 50, definisce il rapporto disarmonico come una proprietà metrica che rimane inalterata con la proiezione. Ciò tuttavia distrugge l'indipendenza logica della geometria proiettiva, che può venir mantenuta soltanto con una descrizione puramente descrittiva.

quali siamo partiti. Così nella figura *abcd, a'b'c'd', a"b"c"d"*, essi stanno tutti nello stesso rapporto disarmonico. La relazione reciproca vale per il rapporto disarmonico tra quattro linee rette. Qui, chiaramente, abbiamo la base richiesta per una definizione qualitativa. La definizione sarà la seguente: Due gruppi di quattro punti ciascuno, si dice che si trovano nello stes-



so rapporto disarmonico quando 1) ogni gruppo di quattro giace su una sola linea retta, e 2) punti corrispondenti di gruppi diversi giacciono a due a due su quattro linee rette che passano da un punto, o quando i due gruppi si trovano in questa relazione rispetto a un terzo gruppo.[8] E reciprocamente: Due gruppi di quattro linee rette si dirà che hanno lo stesso rapporto disarmonico quando 1) ogni gruppo di quattro passa per un singolo punto, e 2) linee corrispondenti di gruppi corrispondenti passano a due a due, per quattro punti su una linea retta, o quando i due gruppi si trovano in questo rapporto nei confronti di un terzo gruppo.

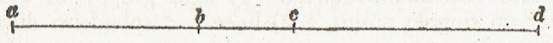
Due gruppi di punti o di linee che hanno lo stesso rapporto disarmonico, vengono considerati equivalenti dalla geometria proiettiva: questa equivalenza qualitativa sostituisce l'eguaglianza quantitativa della geometria metrica, e viene ovviamente inclusa per la sua definizione, nella descrizione di cui sopra delle trasformazioni proiettive in generale.

112. Dobbiamo esaminare adesso, la costruzione quadrilatera.[9] Ciò ha un doppio scopo: primo, definire l'importante caso

[8] Non vi è alcuna proprietà che corrisponda a *tre* punti su una linea, perché essi possono venire trasformati proiettivamente in altri tre punti qualsiasi sulla stessa retta. V. par. 120.

[9] Dovuta alla *Geometrie der Lage* di V. Standt.

speciale noto come serie armonica; e secondo, fornire un metodo non ambiguo ed esauriente per l'assegnazione di numeri diversi a punti diversi. Quest'ultimo metodo ha a sua volta un doppio scopo: primo, quello di offrire un opportuno simbolismo per descrivere e distinguere punti diversi, e fornire così un mezzo per introdurre l'analisi; e secondo, quello di attribuire tali numeri in modo tale che, se avessero il normale significato metrico, come se si trattasse di distanze da un punto su una linea retta numerata, darebbero — 1 quale rapporto disarmonico di una serie armonica, e che se quattro punti hanno lo stesso rapporto disarmonico di altri quattro, lo avranno anche i numeri corrispondenti. Quest'ultimo scopo è dovuto a motivi puramente tecnici: evita la confusione con i nostri preconcetti, che deriverebbe da qualsiasi altro valore di una serie armonica; ci permette, quando si desiderino interpretazioni metriche di risultati proiettivi, di ottenere queste interpretazioni senza noiose trasformazioni numeriche, e ci mette in grado di effettuare trasformazioni proiettive con metodi algebrici. Nello stesso tempo, da un punto di vista strettamente proiettivo, come si è notato sopra, i numeri introdotti hanno un significato puramente convenzionale, e finché non si passa alla geometria metrica non può darsi alcun motivo per assegnare il valore — 1 a una serie armonica. Con questo preliminare, vediamo in cosa consiste la costruzione quadrilatera.

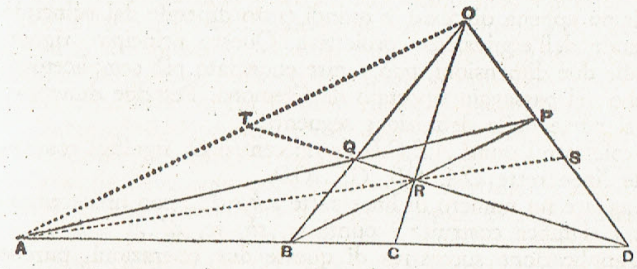


113. Una serie armonica, nella geometria elementare, è una serie il cui rapporto disarmonico è — 1, o in cui i tre segmenti formati dai quattro punti sono in progressione armonica, o ancora, in cui il rapporto tra i due segmenti interni è eguale al rapporto tra i due segmenti esterni. Se i quattro punti sono a,b,c,d si vede facilmente che queste definizioni sono equivalenti tra loro: danno rispettivamente:

$$\frac{ab}{bc} \Big/ \frac{ad}{dc} = -1, \quad \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} = \frac{1}{ac} - \frac{1}{ad} \quad \text{e} \quad \frac{ab}{bc} = \frac{ad}{cd}$$

Ma poiché esse sono tutte quantitative, non possono venire usate per il nostro scopo attuale. Né lo può alcuna definizione che comporti una bisezione delle linee o degli angoli disponibili. Dobbiamo avere una definizione che proceda interamente per mezzo di linee rette e punti, senza misurazione di distanze né di angoli. Ora, dalla definizione della serie armonica data sopra, vediamo che a,b,c,d hanno lo stesso rapporto disarmonico di c,b,a,d. Ciò ci fornisce la proprietà che serve alla nostra definizione. Perché dimostra che in una serie armonica, possiamo trovare una trasformazione proiettiva che scambierà tra loro a e c. Questa è la condizione necessaria e sufficiente per una serie armonica, e la costruzione quadrilatera è il metodo generale per metterla in atto.

Dati tre punti A,B,D su una linea retta, la costruzione quadrilatera trova il punto C armonico con A rispetto a B,D con il seguente metodo: Si prenda un punto qualsiasi O esterno alla linea retta ABD, e si unisca a B e a D. Si tiri una qualsiasi linea retta che passi per A e tagli OD, OB in P e Q.



Si unisca DQ, BP, che si intersecano in R. Si misura OR, e si prolunghi finché incontra ABD in C. C sarà il punto richiesto. Per dimostrarlo, prolunghiamo DRQ finché incontra OA in T e tracciamo AR, che incontra OD in S. Allora, una trasformazione proiettiva di $ABCD$ da R fino ad OD dà i punti S,P,O,D che, proiettati da A su DQ, danno R,Q,T,D. Ma questi, proiettati di nuovo da O su ABD, danno C,B,A,D. Perciò $ABDC$ può venir trasformato proiettivamente in $CBAD$, e quindi forma una serie armonica. Da questo punto, segue facilmente la dimostrazione che la costruzione è unica e generale.[10]

L'introduzione dei numeri, con questa costruzione, non offre alcuna difficoltà di principio – tranne in effetti, quelle che accompagnano sempre l'applicazione del numero ai continui — e può venire studiata esaurientemente nel *Nicht-Euklid* di Klein (p. 337, I). Il principio, è quello di assegnare i nu-

[10] V. Cremona, *op. cit.*, cap. VIII.

meri 0, 1, ∞ ad *A,B,D*, e quindi il numero 2 a *C*, affinché le differenze *AB, AC, AD* possano trovarsi in progressione armonica. Prendendo *B,C,D* come una nuova triade corrispondente ad *A,B,D*, troviamo un punto armonico con *B* rispetto a *C, D*, ed assegniamo ad esso il numero 3, e così via. In questo modo, possiamo ottenere un qualsiasi numero di punti, e siamo sicuri di non avere nessun numero e nessun punto ripetuto due volte, cosicché le nostre coordinate avranno la proprietà essenziale di una corrispondenza univoca con i punti che denotano, e *vice versa.*

114. Il punto importante nella costruzione di cui sopra, comunque, ed il motivo per cui l'ho riprodotta in dettaglio, è che essa procede interamente a mezzo dei principî generali di trasformazione enunciati sopra. Da questo stadio in avanti, tutto viene effettuato in base alle due idee fondamentali che abbiamo appena discusso, e quindi tutto dipende dal principio generale dell'equivalenza proiettiva. Questo principio, riguardo alle due dimensioni, può venire enunciato più semplicemente che nel passaggio riportato da Cremona. Per due dimensioni, si parte dalle definizioni seguenti:

Proiettare i punti *A,B,C,D* da un centro *O*, significa costruire le linee rette *OA, OB, OC, OD*...

Tagliare un numero di linee rette *a,b,c,d*,... con una trasversale *s* significa costruire i punti *sa, sb, sc, sd*...[11]

L'applicazione successiva di queste due operazioni, purché la figura iniziale consista di punti su una linea retta o di linee rette che passano per un punto, dà una figura proiettivamente indistinguibile dalla prima; e quindi, per estensione, se dei punti su una linea retta nella figura iniziale, giacciono su una linea retta nella figura derivata, e reciprocamente per delle rette che attraversano dei punti, le due operazioni danno figure proiettivamente simili. Si può considerare che questo principio generale consista di due parti, secondo l'ordine delle operazioni: se iniziamo con la proiezione e terminiamo con la sezione, trasformiamo una figura formata da punti in un'altra figura formata da punti; nell'ordine inverso, trasformiamo una figura formata da linee in un'altra figura formata da linee.

115. Prima di esser certi del significato del nostro princi-

[11] Le definizioni corrispondenti per il molteplice a due dimensioni delle ghe che passano per un punto, seguono dal principio della dualità.

pio, dobbiamo avere qualche nozione relativa alla definizione di punto e linea retta. Ma questa definizione, nella geometria proiettiva, non può esser data senza discutere il principio di dualità, la forma matematica del cerchio filosofico comportato dalle definizioni geometriche.

Limitandoci per il momento a due dimensioni, il principio afferma, grosso modo, che qualsiasi teorema che tratti di linee che attraversano un punto e di punti su una linea, rimane valido se questi due termini, ovunque si incontrano, vengono scambiati. Così: due punti giacciono su una linea retta che determinano completamente; e due linee rette si incontrano in un punto, che determinano completamente. I quattro punti di intersezione di una trasversale con quattro linee che passano per un punto, hanno un rapporto disarmonico indipendente dalla trasversale specifica; e le quattro linee che uniscono quattro punti su una linea retta a un quinto punto, hanno un rapporto disarmonico indipendente da quel quinto punto. Così anche il nostro principio generale della trasformazione proiettiva ha due facce: una, sulla quale i punti si muovono lungo date linee, e un'altra, in cui le linee ruotano intorno a punti fissi.

Questa dualità suggerisce che qualsiasi definizione dei punti deve essere effettuata a mezzo della linea retta, e qualsiasi definizione della linea retta deve venire effettuata a mezzo dei punti. Quando prendiamo in considerazione la terza dimensione, è vero, la dualità non è più tanto semplice; adesso dobbiamo tener conto anche del piano, ma questo introduce solo un cerchio di tre termini, che è difficile sia preferibile a un cerchio di due termini. Adesso diciamo: Tre punti, o una linea e un punto, determinano un piano: ma reciprocamente, tre piani, o una linea e un piano, determinano un punto. Possiamo considerare la linea retta come una relazione tra due dei suoi punti, ma possiamo anche considerare il punto come una relazione tra due linee rette che lo attraversano. Possiamo considerare il piano come una relazione tra tre punti, ma possiamo anche considerare il punto come una relazione tra tre piani o fra una linea e un piano, che si incontrano in esso.

116. Come si dovrà uscire da questo cerchio? Il fatto è che nella geometria pura, non possiamo uscirne. Perché lo spazio, come vedremo più esattamente in seguito, non è fatto di altro che relazioni; perciò se prendiamo una figura spaziale e cerchiamo i termini tra cui esiste una relazione, nella geometria siamo costretti a cercare tali termini nello spazio, dato

che non abbiamo nessun altro luogo dove cercarli, ma dato che ogni cosa puramente spaziale è mera relazione, siamo destinati a scoprire che i nostri termini si dileguano non appena cerchiamo di afferrarli.

Così la relatività dello spazio, mentre è l'essenza del principio di dualità, nello stesso tempo rende impossibile l'espressione di quel principio, o di qualsiasi altro principio della geometria pura, in un modo che sia scevro da contraddizioni. Ciononostante, se dobbiamo progredire comunque con la nostra analisi del ragionamento geometrico e con le nostre definizioni di linee e punti, dobbiamo, per un po', ignorare questa contraddizione; dobbiamo discutere come se non esistesse, in modo da liberare la nostra scienza da ogni contraddizione che non sia inevitabile.

117. Quindi, seguendo questo procedimento, definiamo i punti come termini di relazioni spaziali, considerando ogni cosa che non sia un punto come una relazione tra punti. In base a questa considerazione, cosa si dovrà ritenere che siano i nostri punti? Chiaramente, se l'estensione è mera relatività, si dovrà ritenere che non contengano alcuna estensione; ma se devono rappresentare i termini delle relazioni spaziali, cioè delle linee rette, tali relazioni debbono mostrarli come i termini delle figure cui si riferiscono. In altre parole, dato che ciò che in realtà può essere preso, senza contraddizione, quale termine di una relazione spaziale, è senza estensione, quale termine da usare in geometria, dove non possiamo uscire dallo spazio, dobbiamo prendere la cosa meno spaziale della quale può trattare la geometria, la cosa che anche se è *nello* spazio, non *contiene* spazio; e questa cosa la chiamiamo punto.[12]

Trascurando quindi la contraddizione fondamentale di questa definizione, il resto delle nostre definizioni segue senza difficoltà. La linea retta è la relazione tra due punti, e il piano è la relazione fra tre. Queste definizioni saranno discusse e difese ampiamente nella sezione B di questo capitolo,[13] quando si potranno esaminare nello stesso tempo le definizioni metriche alternative; ai nostri fini attuali, è sufficiente notare che la geometria proiettiva, fin dall'inizio, considera la linea retta determinata da due punti, e il piano determinato da tre, da cui segue, se prendiamo i punti come termini possibili delle relazioni spaziali, che la linea retta ed il piano possono venire considerati come relazioni tra due e tre punti rispettivamente. Se siamo d'accordo su queste definizioni, possiamo procedere a discutere il principio fondamentale della geometria proiettiva, e ad analizzare gli assiomi impliciti nella sua validità.

[12] È importante notare che questa definizione del punto introduce i concetti metrici. Senza i concetti metrici, abbiamo visto che nulla pare attribuire al punto una precedenza sulla linea retta, o in effetti lo distingua concettualmente dalla linea retta. È quindi inevitabile un riferimento alla quantità nella definizione del punto, se la definizione deve essere geometrica. Una definizione che non sia metrica, dovrebbe essere anche non geometrica. V. cap. 4, par. 196-199.

[13] Par. 163-175.

118. Abbiamo visto che la geometria proiettiva non tratta di quantità, e quindi non riconosce nessuna differenza ove la differenza sia puramente quantitativa. Ora, la comparazione quantitativa dipende dalla identità riconosciuta della qualità; il riconoscimento dell'identità qualitativa quindi, precede logicamente la quantità ed è presupposto in ogni giudizio sulla quantità. Perciò tutte le figure le cui differenze possono venire esaurientemente descritte dalla quantità, cioè dalla pura misurazione, devono possedere un'identità di qualità, e questa deve essere riconoscibile senza appello alla quantità. Ne segue che, definendo la parola qualità nelle faccende geometriche, scopriremo quali gruppi di figure sono proiettivamente indiscernibili.

Se ora questa nostra definizione è giusta, dovrebbe darci il principio proiettivo generale dal quale siamo partiti.

119. Abbiamo convenuto di considerare i punti come i termini delle relazioni spaziali, ed abbiamo convenuto che avrebbero potuto venir distinti punti diversi. Ma abbiamo differito la discussione delle condizioni alle quali poteva venire effettuata questa distinzione. Questa discussione ci fornirà la definizione della qualità e la dimostrazione del nostro principio proiettivo generale.

I punti, tanto per cominciare, sono stati definiti come nient'altro che i termini delle relazioni spaziali. Perciò non hanno proprietà intrinseche; ma vengono distinti soltanto a mezzo delle loro relazioni. Ora la relazione tra due punti, abbiamo detto, è la linea retta sulla quale giacciono. Questo ci fornisce l'identità della qualità per tutte le coppie di punti sulla stessa linea retta, che è necessaria tanto per il nostro principio proiettivo che per la geometria metrica. (Perché ove esista tale identità di qualità, potrà opportunamente applicarsi la quanti-

tà). Se sono dati soltanto due punti, senza l'uso della quantità, essi non possono venire distinti da altri due punti qualsiasi sulla stessa linea retta; perché la relazione qualitativa tra due qualsiasi di questi punti è la stessa che si riscontra per la coppia iniziale, e i punti possono venire distinti l'uno dall'altro solo per una differenza di relazione.

Ma viceversa, una linea retta non è altro che la relazione tra due dei suoi punti, e tutti i punti sono qualitativamente simili. Perciò non può esservi nulla che distingua una linea retta da un'altra, tranne i punti attraverso i quali passa, e questi vengono distinti da altri punti soltanto per il fatto che essa li incontra. Così otteniamo la trasformazione reciproca: se è dato solo un punto, qualsiasi coppia di linee rette che passi per quel punto è indistinguibile qualitativamente da un'altra. E questa inoltre, da un lato è la base della seconda parte del nostro principio proiettivo generale, e dall'altro la condizione per applicare la quantità nella misurazione degli angoli nel punto in cui si dipartono due linee rette intersecanti.

120. Possiamo vedere adesso il motivo di quello che può essere parso finora un fatto alquanto arbitrario, cioè la necessità di avere *quattro* punti colineari per un rapporto disarmonico. Ricorrendo alla costruzione quadrilatera ed alla conseguente introduzione del numero, vediamo che il rapporto disarmonico è una relazione proiettiva intrinseca di quattro punti colineari o di quattro linee rette convergenti, tale che dati tre termini e la relazione, il quarto termine può venire determinato univocamente con metodi proiettivi. Ora, consideriamo per prima cosa una coppia di punti. Dato che tutte le linee rette sono proiettivamente equivalenti, la relazione tra una coppia di punti è esattamente equivalente a quella tra un'altra coppia. Quindi, dato un solo punto, non si può assegnare nessuna relazione proiettiva a un secondo punto qualsivoglia, che possa in alcun modo limitare la scelta del secondo punto. Tuttavia, dati due punti, tale relazione esiste — il terzo punto può venir dato colineare ai primi due. Questo limita la sua posizione a una linea retta, ma dato che due punti non determinano altro che una sola linea retta, il terzo punto non può venire limitato oltre. Così vediamo perché non si può trovare alcuna relazione proiettiva intrinseca fra tre punti, che ci metta in grado, partendo da due, di determinare univocamente il terzo. Tuttavia, dati tre punti colineari, abbiamo ben più di una semplice linea retta, e la costruzione quadrilatera ci mette in grado di determinare univocamente un numero a piacere di nuovi punti colineari. Ciò dimostra perché il rapporto disarmonico deve essere una relazione tra quattro punti piuttosto che fra tre.

121. Ritengo che adesso possiamo dimostrare che due figure che siano in relazione proiettiva, sono qualitativamente simili. Cominciamo con un certo numero di punti su una linea retta. Fintantoché essi vengono considerati senza riferimento ad altri punti o figure, sono tutti qualitativamente simili. Possono venire distinti dall'intuizione immediata, ma quando cerchiamo di distinguerli concettualmente, senza la quantità, troviamo che il compito è impossibile, dato che l'unica relazione qualitativa tra due qualsiasi, la linea retta, è eguale per qualsiasi altri due. Ma adesso scegliamo a caso, un punto al di fuori della linea retta. I punti sulla linea acquisiscono adesso nuovi attributi, e precisamente la relazione con il nuovo punto, cioè le linee rette che li uniscono a questo nuovo punto. Ma reciprocamente queste linee rette, e soltanto loro, definiscono il nostro punto esterno, e tutte le linee rette sono qualitativamente simili. Se prendiamo degli altri punti esterni, perciò, e li uniamo agli stessi punti della linea retta originale, otteniamo una figura in cui, fintantoché la quantità sia esclusa, non esiste nessuna differenza concettuale dalla figura precedente. L'intuizione immediata può distinguere le due figure, ma la discriminazione qualitativa non può farlo. Così, otteniamo una trasformazione proiettiva di quattro linee in quattro altre linee, ottenendo una figura qualitativamente indistinguibile da quella iniziale. Un argomento simile vale per le altre trasformazioni proiettive. Così l'unico motivo, nell'ambito della geometria proiettiva, per non considerare le figure proiettive come realmente identiche, è la percezione intuitiva della differenza di posizione. Ciò è fondamentale, e deve venire accettato come *datum*. È presupposto nella distinzione tra punti diversi, e rappresenta la vita stessa della geometria. Infatti, è l'essenza della nozione di una forma di esternalismo, la quale nozione rappresenta l'argomento della geometria proiettiva.

122. Possiamo adesso riassumere i risultati della nostra analisi della geometria proiettiva, ed enunciare gli assiomi sui quali è basato il suo ragionamento. Poi dovremo dimostrare che questi assiomi sono necessari a qualsiasi forma di esternalismo, il che ci porterà dalla mera analisi, a un argomento trascendentale.

Gli assiomi supposti nell'analisi di cui sopra, e che sembra siano sufficienti a fondare la geometria proiettiva, possono venire enunciati grosso modo come segue:

I. Possiamo distinguere parti diverse dello spazio, ma tutte le parti sono qualitativamente simili, e vengono distinte soltanto dal fatto immediato che si trovano una al di fuori dell'altra.

II. Lo spazio è continuo e divisibile all'infinito; il risultato della divisione all'infinito, l'estensione zero, si chiama *punto*.[14]

III. Due punti qualsiasi determinano una figura unica, che si dice linea retta, tre in generale determinano una figura unica, il piano. Quattro qualsiasi determinano una figura corrispondente a tre dimensioni, e nonostante quanto possa sembrare in contrario, lo stesso può dirsi per qualsiasi numero di punti. Ma questo processo, prima o poi giunge al termine, con un numero di punti che determina l'intero spazio. Perché se così non fosse, nessun numero di relazioni di un punto rispetto a un insieme di punti dati, potrebbe mai determinare la relazione con nuovi punti, e la geometria diverrebbe impossibile.[15]

Non si intende che questa enunciazione degli assiomi abbia una precisione assoluta: potrebbero facilmente fornirsi altre enunciazioni egualmente valide. Perché tutti questi assiomi, come vedremo in seguito, sono filosoficamente interdipendenti e quindi possono venire enunciati in molti modi. Comunque, la enunciazione di cui sopra, se non mi sbaglio, contiene tutto ciò che è essenziale alla geometria proiettiva, e tutto ciò che è necessario per dimostrare il principio della trasformazione proiettiva. Prima di discutere l'apriorità di tali assiomi, ricapitoliamo brevemente ancora una volta gli scopi che si prefiggono di raggiungere.

123. Dal punto di vista esclusivamente matematico, abbiamo visto che la geometria proiettiva discute soltanto quali figure possono venire ottenute l'una dall'altra a mezzo delle trasformazioni proiettive, cioè a mezzo delle operazioni di proiezione e sezione. Queste operazioni, in tutte le loro forme, presuppongono il punto, la linea retta e il piano,[16] la cui necessità per la geometria proiettiva, dal punto di vista puramente

[14] Tuttavia, su questo assioma, v. par. 131.

[15] Per la dimostrazione di questa proposizione, v. cap. 3, sez. D, assioma delle dimensioni.

matematico, si dimostra così da sé fin dall'inizio. Ma filosoficamente, la geometria proiettiva, come abbiamo visto, ha un fine più vasto. Questo fine più vasto, che fornisce alla investigazione delle figure proiettivamente equivalenti, la sua importanza principale, consiste nella determinazione della similitudine spaziale qualitativa, cioè nella determinazione di tutte le figure che, quando ne sia data una, possono distinguersi da quella data fintantoché la quantità è esclusa, solo per il semplice fatto che sono esterne ad essa.

124. Ora, quando consideriamo cosa comporta una equivalenza qualitativa assoluta del genere, troviamo subito che il suo presupposto più ovvio è la perfetta omogeneità dello spazio. Perché si suppone che una figura possa venire definita completamente dalle sue relazioni interne, e che le relazioni esterne, che rappresentano la sua posizione, anche se bastano a distinguerla da altre figure, non ne modificano in nessun modo le proprietà interne, che sono considerate qualitativamente identiche a quelle delle figure che hanno relazioni esterne del tutto diverse. Se le cose non stessero così, non sarebbe possibile niente di analogo alla trasformazione proiettiva. Perché tali trasformazioni cambiano sempre la posizione, cioè le relazioni esterne, di una figura, e perciò, se le figure dipendessero dalle relazioni con le altre figure o con lo spazio vuoto, non potrebbero venire studiate senza riferimento ad altre figure, o alla posizione assoluta della figura originale. In breve, per il nostro principio, abbiamo bisogno di quella che può venir definita la reciproca passività e la reciproca indipendenza di due parti o figure dello spazio.

Questa passività e questa indipendenza comportano l'omogeneità dello spazio, o il suo equivalente, la relatività della posizione. Perché, se le proprietà interne di una figura sono le stesse, qualsiasi possano essere le sue relazioni esterne, ne consegue che tutte le parti dello spazio sono qualitativamente simili, dato che la variazione di una relazione esterna è una variazione nella parte di spazio occupata. Ne consegue anche che ogni posizione è relativa ed estrinseca, cioè, che la posizione

[16] La linea retta e il piano, in tutte le discussioni di geometria generale, non sono necessariamente euclidei. Sono semplicemente figure determinate in generale, da due e da tre punti rispettivamente; che essi siano conformi all'assioma delle parallele ed alla forma di Euclide dell'assioma della linea retta, o che non lo siano, non deve essere preso in considerazione nella definizione generale.

di un punto, o la parte di spazio occupata da una figura, non rappresenta una proprietà intrinseca del punto o della figura, né vi ha effetto alcuno, ma è esclusivamente una relazione rispetto ad altri punti o figure nello spazio, e rimane senza effetto, tranne quando vengano prese in esame tali relazioni.

125. Quindi, l'omogeneità dello spazio e la relatività della posizione sono presupposte nella comparazione spaziale qualitativa di cui tratta la geometria proiettiva. La seconda, come abbiamo visto, è anche la base del principio di dualità. Ma queste proprietà, come adesso cercherò di dimostrare, appartengono necessariamente a qualsiasi forma di esternalismo, e così sono proprietà *a priori* di tutti gli spazi possibili. Tuttavia, per dimostrare questo, dobbiamo prima definire la nozione di una forma di esternalismo in generale.

Osserviamo, per cominciare, che la distinzione tra le geometrie euclidee e non euclidee, tanto importante nelle indagini metriche, scompare quando si tratta della geometria proiettiva. Ciò suggerisce che la geometria proiettiva, anche se all'inizio venne inventata come la scienza dello spazio euclideo, e in seguito anche dello spazio non euclideo, in realtà ha a che fare con un concetto più vasto, un concetto che li include entrambi e trascura gli attributi per i quali differiscono. Parlerò di questo concetto come di una forma di esternalismo.

126. Nella approfondita introduzione filosofica di Grassmann al suo *Ausdehnungslehre* del 1844, egli suggerisce che la geometria, anche se impropriamente considerata pura, era in realtà un ramo della matematica applicata, dato che tratta di un argomento, non creato come i numeri, dall'intelletto, ma dato ad esso, e quindi non interamente soggetto solo alle sue leggi. Ma deve essere possibile – così sosteneva – costruire un ramo della matematica pura, cioè una scienza il cui oggetto sia interamente una creatura dell'intelletto, che pure tratti, come fa la geometria, dell'estensione, un'estensione tuttavia concepita, e non empiricamente percepita dalla sensazione o intuizione.

Da questo punto di vista, la controversia tra i kantiani e gli antikantiani perde interamente la sua importanza, dato che la distinzione tra la matematica pura e quella mista non sta nella distinzione tra soggettivo ed oggettivo, ma tra ciò che è puramente intellettuale da una parte, e tutto il resto dall'altra. Ora Kant aveva sostenuto, con grande enfasi, che lo spazio non era una costruzione intellettuale, ma una intuizione soggettiva. Quindi la geometria, per la distinzione di Grassmann, appartiene alla matematica mista tanto dal punto di vista di Kant che da quello dei suoi oppositori. E la distinzione di Grassmann, io sostengo, è ancora più importante per l'epistemologia, e l'unica da adottarsi per distinguere l'*a priori* dall'empirico. Perché ciò che è puramente intuitivo può cambiare senza capovolgere le leggi del pensiero, senza rendere la conoscenza formalmente impossibile; ma ciò che è puramente intellettivo non può cambiare, senza che cambino le leggi del pensiero, e nello stesso tempo tutta la nostra conoscenza vada in frantumi. Perciò seguirò la distinzione di Grassmann, per costruire una forma di esternalismo *a priori* e puramente concettuale.

127. Non c'è bisogno di discutere la dottrina pura dell'estensione costruita da Grassmann – essa conteneva molto materiale empirico e filosoficamente era un fallimento. Ma ritengo che i suoi principî ci metteranno in grado di dimostrare che la geometria proiettiva, interpretata astrattamente, è la scienza che egli intuì, e tratta un argomento che può essere costruito dal puro intelletto soltanto. Comunque, se è così, si deve notare che la geometria proiettiva, per il momento, viene resa puramente ipotetica.[17] Ogni verità necessaria, come ha dimostrato Bradley, è ipotetica,[18] ed afferma, *prima facie*, soltanto il fondamento su cui poggia la relazione necessaria tra premesse e conclusione. Se costruiamo un mero concetto di esternalismo, e così abbandoniamo lo spazio che in realtà ci è dato, il risultato della nostra costruzione, finché non torniamo a qualcosa di realmente dato, rimane senza importanza esistenziale – se ci *sarà* una esperienza di esternalismo, afferma, allora ci deve essere una forma di esternalismo con queste e queste proprietà. Il primo argomento di Kant circa lo spazio penso che dimostri, per coloro che ammettono l'esperienza di un mondo di cose diverse ma correlate, che ci deve essere un'esperienza di esternalismo. Ma questa è una questione che appartiene al prossimo capitolo.

Ciò che dobbiamo fare qui, non è discutere se esiste una forma di esternalismo, ma se, nel caso che tale forma esista, essa

[17] Cercherò di dimostrare nel capitolo 4 che la geometria proiettiva deve avere importanza esistenziale.

[18] *Logica*, libro I, cap. II.

debba possedere le proprietà incorporate negli assiomi della geometria proiettiva. Ora, prima di tutto, cosa intendiamo con tale forma?

128. In un qualsiasi mondo in cui la percezione ci presenta cose diverse, di contenuto discriminato e differenziato, deve esserci nella percezione, almeno un « principio di differenziazione »,[19] cioè un elemento per cui le cose presentate si distinguono come diverse. Questo elemento, preso a sé stante ed astratto dal contenuto che differenzia, possiamo definirlo una forma di esternalismo. Che, quando sia preso a sé stante, debba apparire come una forma e non come una mera diversità di contenuto materiale, ritengo che sia abbastanza ovvio. Perché la diversità del contenuto materiale non si può studiare separata dal contenuto materiale; ciò che vogliamo studiare qui, invece, è la semplice possibilità di tale diversità, che rappresenta quello che rimane, come cercherò di dimostrare in seguito,[20] quando astraiamo da ogni percezione dei sensi tutto ciò che distingue la sua materia specifica. Quindi questa possibilità, questo principio di pura diversità, rappresenta la nostra forma di esternalismo. Fino a qual punto sia necessario supporre una forma del genere, distinta dalle cose correlate, lo esaminerò più avanti.[21] Per il momento, dato che lo spazio trattato dalla geometria è senz'altro una forma di questo genere, dobbiamo chiedere soltanto: Quali proprietà deve necessariamente possedere tale forma, se si considera in astratto?

129. In primo luogo, l'esternalismo è un concetto essenzialmente relativo — nulla può essere esterno a se stesso. Essere esterno a qualcosa significa essere un'altra cosa che è in qualche relazione con quella. Perciò, quando astraiamo una forma di esternalismo da ogni contenuto materiale, e la studiamo fine a se stessa, la posizione apparirà, di necessità, puramente relativa — una posizione non può avere nessuna qualità intrinseca, perché la nostra forma consiste di esternalismo puro, e l'esternalismo non contiene ombra né traccia di una qualità intrinseca. Così otteniamo il nostro postulato fondamentale, la relatività della posizione o, possiamo anche dire, la completa assenza, da parte della nostra forma, di ogni traccia di materialità.

[19] V. la *Logica* di Bradley, p. 63. Si vedrà che il senso in cui ho parlato dello spazio quale principio di differenziazione non è il senso di un « principio di individuazione » al quale fa obbiezione Bradley.

[20] Cap. 4, par. 186-191.

[21] Cap. 4, par. 201 ss.

Lo stesso argomento può venire esposto come segue: Se astraiamo il concetto di esternalismo, e cerchiamo di considerarlo *per se*, è evidente che dobbiamo ottenere un oggetto privo egualmente di elementi e di totalità. Perché abbiamo fatto astrazione dalla materia varia che riempiva la nostra forma, mentre qualsiasi elemento, o qualsiasi totalità conserverebbe alcune delle qualità della materia. Infatti un elemento o una totalità dovrebbero essere una cosa non esterna a se stessa, e così conterrebbero qualcosa che non è esternalismo puro. Da ciò scaturiscono la divisibilità all'infinito, con la nozione autocontradditoria del punto, nella ricerca degli elementi, e l'estensione illimitata, con la contraddizione di un regresso infinito o di un circolo vizioso, nella ricerca di un tutto completo. Così, ancora, la nostra forma non contiene né elementi né totalità, ma solo relazioni senza fine — perché i termini di queste relazioni sono esclusi dalla nostra astrazione dalla materia che riempie la forma.

130. In modo simile, possiamo dedurre l'omogeneità della nostra forma. La diversità del contenuto che era possibile soltanto entro la forma di esternalismo, è stata astratta, non lasciando altro che la nuda possibilità della diversità, il semplice principio di differenziazione, uniforme e indifferenziato in sé. Perché se la diversità presuppone una tale forma, la forma non può, a meno che non sia contenuta in una nuova forma, essere in sé diversa o differenziata.

Oppure, possiamo dedurre la stessa proprietà dalla relatività della posizione. Perché qualsiasi attributo di una posizione, per cui fosse distinta da un'altra, sarebbe necessariamente più o meno intrinseco, e in contraddizione con la relatività pura. Perciò tutte le posizioni sono qualitativamente simili, cioè la forma è dappertutto omogenea.

131. Da ciò che è stato detto circa l'omogeneità e la relatività, segue una delle proprietà più singolari di una forma di esternalismo. Questa proprietà è che la relazione di esternalismo tra due cose qualsiasi è divisibile all'infinito, e conseguentemente, può essere considerata come composta da un numero infinito dei pretesi elementi della nostra forma, o ancora come la somma di due relazioni di esternalismo.[22] Parlare di dividere

[22] È importante notare tuttavia, che questo modo di considerare le rela-

o sommare delle relazioni può certo suonare assurdo – infatti rivela l'improprietà della parola relazione a questo riguardo. Tuttavia, è difficile trovare un'espressione che risulti meno impropria. Il fatto è questo: sembra che l'esternalismo non sia tanto una relazione quanto pura relatività, o la semplice possibilità di una relazione. A questo proposito, mi dilungherò nel quarto capitolo.[23] In questo momento, è importante solo rendersi conto di ciò che presuppone la discussione che segue, che la relazione – se così possiamo chiamarla – di esternalismo tra due o più cose, dato che la nostra forma è omogenea, deve essere passibile di variazione continua, e dato che la nostra forma divisibile all'infinito è costituita da relazioni del genere, deve essere passibile di divisione infinita. Ma il risultato della divisione all'infinito viene definito l'elemento della nostra forma. (La nostra forma non ha elementi, ma dobbiamo immaginare degli elementi per poterne ragionare, come verrà dimostrato più ampiamentte nel capitolo quarto). Da ciò ne consegue che ogni relazione di esternalismo può venire considerata, ai fini scientifici, come una congerie infinita di elementi, anche se, filosoficamente, sono valide le sole relazioni, e gli elementi sono il risultato autocontraddittorio dell'ipostatizzazione della forma di esternalismo. Questo modo di considerare le relazioni dell'esternalismo è importante per comprendere il significato di concetti come quello di tre o quattro punti colineari.

Dato che questo punto è difficile e importante, ripeterò con qualche dettaglio maggiore, la spiegazione del modo in cui le linee rette e i piani giungono a venire considerati congerie di punti. Dal punto di vista strettamente proiettivo, anche se tutte le altre figure *sono* semplicemente un insieme del necessario numero di punti, linee o piani, dati a mezzo di una costruzione proiettiva, le linee rette e i piani in sé vengono dati integralmente, e non debbono esser considerati divisibili o composti di parti. Dire che un punto giace su una linea retta, per la vera geometria proiettiva, significa che la linea retta è una relazione tra questo e qualche altro punto. Qui, i punti interessati, se la nostra enunciazione deve essere liberata dalle contraddizioni, debbono venire considerati, se posso usare questa espressione, come punti *reali* – cioè come centri materiali senza estensione.[24] Le linee rette e i piani sono quindi relazioni tra questi atomi materiali. Sono tuttavia relazioni che possono subire un'alterazione metrica, mentre rimangono proiettivamente invariati. Quando la relazione proiettiva tra i due punti A e B, è la stessa di quella tra i due punti A e C, mentre la relazione metrica (distanza) è diversa, i tre punti A,B,C si dicono colineari. Ora, il metodo metrico di considerare le figure spaziali richiede che esse siano ipostatizzate, e non vengano più considerate come semplici relazioni. Perché quando consideriamo una quantità come estesa, cioè divisibile in parti, necessariamente la consideriamo come più che una semplice relazione o attributo, dato che nessuna sempliee relazione o attributo possono venire divisi. Per il trattamento quantitativo, perciò, le relazioni spaziali devono essere ipostatizzate.[25] Fatto questo, come abbiamo visto sopra, otteniamo una forma di esternalismo omogeneo e divisibile all'infinito. Adesso troviamo che la distanza, per esempio, può venire continuamente variata, senza che cambi la linea retta sulla quale viene misurata. Otteniamo così, sulla linea retta in questione, una serie continua di punti che, dato che è continua, consideriamo che costituisca la nostra linea retta. Così, è soltanto con l'ipostatizzazione delle relazioni richiesta dalla geometria metrica, che sorge l'idea di linee rette e piani *composti* di punti, ed è da questa ipostatizzazione che derivano le difficoltà della geometria metrica.

zioni spaziali è metrico; dal punto di vista proiettivo, la relazione tra due punti è l'intera linea retta illimitata sulla quale giacciono, e non è necessario che venga considerata divisibile in parti o costituita di punti.

[23] Par. 207, 208. V. Hegel, *Naturphilosophie*, par. 254.

132. Il passo successivo, per definire una forma di esternalismo, si ottiene dal concetto delle *dimensioni*. Abbiamo visto che le posizioni vengono definite solamente dalle loro relazioni con altre posizioni. Ma affinché tale definizione possa risultare possibile, deve essere sufficiente un numero finito di relazioni, dato che dei numeri infiniti sono filosoficamente inammissibili.

Pertanto una posizione dovrà essere definibile, se la conoscenza della nostra forma dovrà essere comunque possibile, da un numero finito intero di relazioni rispetto alle altre posizioni. Ogni relazione, necessaria così per la definizione, la chiameremo dimensione. Da ciò otteniamo la proposizione: *Qualsiasi*

[24] V. cap. 4, par. 196-199.

[25] V. il mio articolo che apparirà su « Mind », luglio 1897, su « Le relazioni tra numero e quantità ».

forma di esternalismo deve avere un numero finito intero di dimensioni.

133. Si può far notare che la discussione di cui sopra ha trascurato una possibilità. Ha usato un argomento trascendente, così può sostenere un avversario, senza dimostrare sufficientemente che la conoscenza dell'esternalismo deve essere possibile senza riferimento alla materia, reciprocamente esterna. La definizione di una posizione può essere impossibile fintantoché trascuriamo la materia che riempie la forma, ma può diventare possibile quando questa materia viene presa in considerazione. Ritengo che questa obbiezione possa venire messa a tacere con successo, facendo riferimento alla passività ed omogeneità della nostra forma. Perché se la definizione di una posizione dipendesse dalla materia specifica che riempie quella posizione, ciò comporterebbe qualche tipo di interazione tra la materia e la sua posizione, qualche effetto del contenuto diverso sulla omogeneità della forma. Ma dato che la forma è completamente priva di materialità, perfettamente impassibile, e completamente priva di differenze tra le sue parti, qualsiasi effetto del genere è inconcepibile. Un effetto sulla posizione dovrebbe alterarla in qualche modo, ma come potrebbe essere alterata? Non ha qualità, tranne quelle che la rendono la posizione che è, in confronto ad altre posizioni; perciò non può cambiare senza diventare un'altra posizione. Ma un cambiamento del genere contraddice la legge dell'identità. Perciò, non è la posizione che è cambiata, ma il contenuto che si è mosso nella forma. Così deve essere possibile, se si può in qualche modo ottenere la conoscenza della nostra forma, ottenerla senza che vi sia dipendenza logica dalla materia specifica che la riempie. Perciò l'argomento di cui sopra, garantita la possibilità della conoscenza nel compartimento in questione, dimostra la necessità di un numero finito intero di dimensioni.

134. Ripetiamo la nostra discussione iniziale, alla luce di questa delucidazione. Una posizione viene completamente definita quando, e soltanto quando, vi sono relazioni note sufficienti a metterci in grado di determinare la sua relazione rispetto a qualsiasi nuova posizione nota. Una definizione del genere può aver luogo soltanto a mezzo di relazioni entro la forma di esternalismo, come abbiamo appena visto, e mai a mezzo di relazioni che comportano riferimento alla materia specifica che riempie la forma. Ma la possibilità di una definizione del genere consegue dalla legge del medio escluso, quando questa legge viene interpretata nel significato che Bosanquet le attribuisce, cioè « La realtà... è un sistema di parti reciprocamente determinate » .[26] Perché questo implica che, fornite le relazioni di una parte *A* rispetto ad altre parti *B,C...*, un numero sufficiente di tali relazioni getta luce sulle relazioni di *B* con *C*, etc. Se le cose non stessero così, non si potrebbe dire che le parti *A,B,C...* formano un sistema; perché in tale sistema, definire *A* significa definire nello stesso tempo, tutti gli altri membri, e fornire un attributo ad *A*, significa fornire un attributo a *B* e *C*. Ma le relazioni tra le posizioni, quando restauriamo la materia dalla quale le posizioni erano astratte, sono relazioni tra le cose che occupano quelle posizioni, e queste relazioni abbiamo visto che possono venire studiate senza riferimento alla natura sotto altri aspetti specifica, delle cose messe in relazione. Ne consegue che, quando applichiamo il principio generale dell'unità sistematica a queste relazioni in particolare, troviamo che queste relazioni dipendono l'una dall'altra, dato che non dipendono per la loro definizione, da nient'altro. Ciò dà l'assioma delle dimensioni, nella forma generale di cui sopra, quale risultato, sul nostro piano geometrico astratto, della relatività della posizione e della legge del medio escluso.

135. Prima di procedere oltre, è necessario discutere l'importante caso speciale quando una forma di esternalismo ha soltanto una dimensione. Delle due forme di questo genere, date dall'esperienza, una, e precisamente il tempo, presenta un esempio di questo caso speciale. Ma credo che si possa dimostrare, che la funzione che si richiede a tali forme per costituire la possibilità dell'esperienza, non potrebbe venire adempiuta da una forma a una dimensione soltanto. Perché in una forma a una dimensione, i diversi contenuti possono venire sistemati in serie e non si può cambiare l'ordine dei contenuti nella serie, senza compenetrazione. Ma la compenetrazione è impossibile, dato che una forma di esternalismo è la mera espressione della diversità tra le cose, da cui consegue che le cose non possono occupare la stessa posizione in una forma, tranne che non vi sia un'altra forma per la quale differenziarle. Perché senza esternalismo non esiste nessuna diversità.[27] Così due corpi possono occupare lo stesso spazio, ma solo in tempi di-

[26] *Logica*, vol. II, cap. VII, p. 211.
[27] Si intende sempre una diversità reale opposta a quella logica. Pos-

versi: due cose possono esistere contemporaneamente, ma solo in luoghi diversi. Una forma ad una dimensione, quindi, non può, in sé, offrire la variazione delle relazioni dell'esternalismo, per cui soltanto un mondo variato di cose correlate può venire portato alla conoscenza. In uno spazio a una dimensione, per esempio, soltanto un solo oggetto, che deve apparire come un punto, o al massimo due oggetti, uno davanti e uno dietro, potrebbero mai venir percepiti. Così sembra che due o più dimensioni siano una condizione indispensabile per qualsiasi cosa che convenga definire esperienza di cose correlate.

136. A questo argomento si può obbiettare che la sua validità dipende dal presupposto che il cambiamento di una relazione di esternalismo debba essere continuo. Sembra quasi impossibile sia porre che respingere questa obbiezione in un modo che non implichi il tempo. Perché non possiamo parlare di cambiamento, sia esso continuo o discontinuo, senza immaginare il tempo. Perciò, lasciamo che il tempo si faccia conoscere, e discutiamo se il cambiamento temporale, in qualsiasi altra forma di esternalismo, è necessariamente continuo.[28] Ritengo che dobbiamo rispondere che la continuità è necessaria. Il cambiamento di relazione, nella nostra forma non temporale, può venire sicuramente descritto come moto, e la legge della causalità – dato che abbiamo già presupposto il tempo – può applicarsi a questo moto. Allora ne consegue che il moto discontinuo comporterebbe l'effetto finito di una causa infinitesimale, perché una causa che agisse solo per un attimo di tempo sarebbe infinitesimale. Comporta anche una validità dell'attimo di tempo, mentre ciò che rimane valido in qualsiasi forma di esternalismo non è, come abbiamo già visto, l'elemento infinitesimale e auto-contraddittorio che risulta dalla divisione infinita, ma la relazione finita che la matematica analizza in elementi che si dileguano. Perciò il cambiamento deve essere continuo, e la possibilità della sistemazione in serie rimane valida.

In una forma a una dimensione diversa dal tempo, deve valere lo stesso ragionamento. Perché per l'esperienza, sarebbe necessaria qualcosa di analogo alla causalità, e la relatività

sono coesistere diversi aspetti in una cosa in uno stesso tempo e luogo, ma due cose reali diverse non possono coesistere allo stesso modo.

[28] Circa l'insufficienza del tempo da solo, cfr. cap. 4, par. 191.

della forma rimarrebbe ancora necessariamente valida. Perciò dato che sono state presupposte soltanto queste due proprietà del tempo, l'opinione di cui sopra rimarrebbe valida per qualsiasi seconda forma le cui relazioni fossero correlate a quelle della prima, come l'analogo della causalità richiederebbe che fossero.

137. Il passo successivo della discussione, che suppone due o più dimensioni, riguarda gli analoghi generali delle linee rette e dei piani, cioè le figure – che possono venire considerate tanto come relazioni tra posizioni che come una serie di posizioni – determinate univocamente da due o da tre posizioni. Se questo passo sarà coronato da successo, la nostra deduzione degli assiomi proiettivi di cui sopra sarà completa, e la geometria descrittiva verrà determinata come la dottrina astratta *a priori* delle forme di esternalismo.

Per dimostrare questa affermazione, considerate di quale natura possono essere le relazioni dalle quali vengono definite le posizioni. Abbiamo già visto che la nostra forma è puramente relativa e divisibile all'infinito, e che le posizioni (punti) sono il risultato auto-contradditorio della ricerca di qualcosa di diverso dalle relazioni. Quindi, ciò che veramente intendiamo per relazioni che definiscono una posizione, sono, quando sciogliamo l'astrazione precedente, le relazioni dell'esternalismo per cui qualcosa è in relazione a qualche altra cosa. Ma quando rimaniamo nella forma astratta, come appariranno tali relazioni?

138. Dobbiamo dimostrare che due posizioni debbono avere una relazione indipendente da qualsiasi riferimento alle altre posizioni. Per dimostrare questo, ricorriamo a ciò che è stato detto a proposito delle dimensioni, circa la passività ed omogeneità della nostra forma. Dato che le posizioni vengono definite soltanto dalle relazioni, debbono esservi delle relazioni, tra le posizioni, entro la forma. Ma se vi sono tali relazioni, deve esistere una relazione che è intrinseca a due posizioni. Perché supporre il contrario, è come attribuire una interazione o rapporto causale di qualche tipo, tra queste due posizioni e le altre – una supposizione che la perfetta omogeneità della nostra forma rende assurda, dato che tutte le posizioni sono qualitativamente simili, e non possono venir cambiate senza perdere la loro identità. Possiamo esporre l'argomento

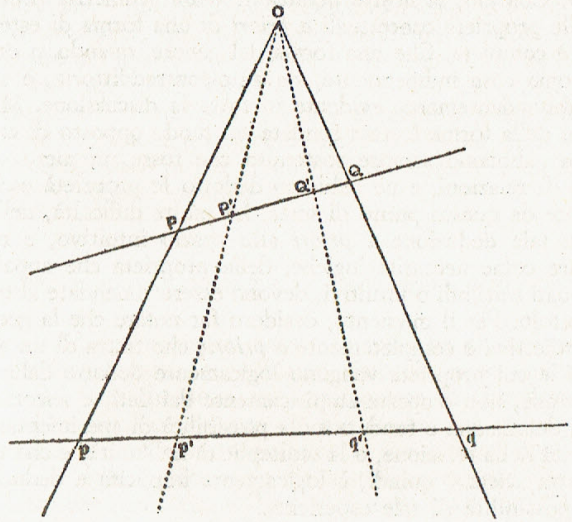
in questa maniera: dato che le posizioni sono definite soltanto dalle loro relazioni, tale definizione non potrebbe mai cominciare, tranne che con una relazione tra due posizioni. Perché supponiamo che fossero necessarie tre posizioni *A,B,C* e desse-ro origine alla relazione *abc* tra di esse. In questo caso non rimarrebbe alcun mezzo per definire le coppie diverse *BC, CA, AB*, dato che l'unica relazione che le definisce sarebbe comune a tutte e tre le coppie. Non ci si guadagnerebbe nulla in questo caso, riferendoci a nuovi punti, perché dalla omogeneità e passività della forma consegue che questi nuovi punti non potrebbero influire sulle relazioni interne della nostra triade, le quali relazioni, se possono dare comunque una definizione, debbono darla senza l'aiuto di riferimenti esterni. Quindi, se deve essere possibile la definizione, due posizioni debbono aver qualche relazione che bastano da sole a definire. Esattamente la stessa discussione vale per tre posizioni, o per quattro; la discussione perde il suo scopo soltanto quando abbiamo esaurito le dimensioni della forma considerata. Così in tre dimensioni, cinque posizioni non hanno nessuna nuova relazione, che non sia deducibile da quelle già note, perché per la definizione delle dimensioni, tutte le relazioni interessate possono venire dedotte da quelle del quarto punto con i primi tre, insieme a quelle del quinto con i primi tre.

Possiamo dare all'argomento una forma più concreta e forse più convincente, considerando la materia collocata nella nostra forma. Se due cose sono reciprocamente esterne, dato che appartengono allo stesso mondo, debbono avere qualche relazione di esternalismo; quindi esiste una relazione di esternalismo tra due cose. Ma dato che la nostra forma è omogenea, può sussistere la stessa relazione di esternalismo in altre parti della forma, cioè mentre le due cose considerate mutano le loro relazioni di esternalismo rispetto alle altre cose. La relazione di esternalismo tra due cose, quindi, è indipendente dalle altre cose. Perciò, quando torniamo al linguaggio astratto della forma, due posizioni hanno una relazione determinata da quelle due posizioni soltanto, indipendente da altre posizioni.

Esattamente lo stesso argomento vale per le relazioni fra tre posizioni, e in ogni caso la relazione deve comparire nella forma, non come una semplice deduzione dalle posizioni cui si riferisce. Perché le relazioni, come abbiamo visto, costituiscono effettivamente una forma di esternalismo, e non sono semplici deduzioni da termini che non si trovano in nessun posto nella forma.[29]

[29] Geometricamente, l'assioma del piano non è che tre punti determinano comunque una figura, che segue dall'assioma della linea retta, ma che la linea retta che unisce due punti a caso del piano giace interamente nel piano. Questo assioma richiede un metodo proiettivo di costruzione del piano, quello cioè di trovare tutte le triadi di punti che determinano la stessa figura proiettiva della triade data. Si otterrà la costruzione richiesta se possiamo trovare una qualsiasi figura proiettiva determinata da tre punti, ed un metodo proiettivo per giungere ad altri punti che determinano la stessa figura.

Poniamo i tre punti *O, P, Q* di cui sia richiesta la relazione proiettiva. Allora avremo le tre linee rette *PQ, QO, OP*.



Metricamente, la relazione tra questi punti, è costituita dall'area, e dalla grandezza dei lati e degli angoli del triangolo *OPQ*, proprio come la relazione tra due punti è la distanza. Ma proiettivamente, la figura rimane invariata quando *P* e *Q* si muovono lungo *OP* ed *OQ*, o quando *OP* ed *OQ* ruotano attorno ad *O* in modo tale da incontrare ancora *PQ*. Questo è un risultato del principio generale dell'equivalenza proiettiva enunciato sopra (par. 108, 109). Da ciò, la relazione proiettiva tra *O, P* e *Q* è la medesima di quella tra *O, p, q*, o *O, P', Q'*, cioè *p, q* e *P', Q'* giacciono nel piano *OPQ*. In questo modo possiamo ottenere qualsiasi numero di punti sul piano, e ripetendo la costruzione con nuove triadi, si possono raggiungere tutti i punti del piano. Dobbiamo dimostrare che

Per riassumere: Dato che la posizione è relativa, due posizioni debbono avere *qualche* relazione l'una rispetto all'altra; e dato che la nostra forma di esternalismo è omogenea, questa relazione può mantenersi invariata mentre le due posizioni cambiano le loro relazioni rispetto ad altre posizioni. Perciò la loro relazione è intrinseca, e indipendente dalle altre posizioni. Dato che la forma è un mero complesso di relazioni, la relazione in questione deve, se la forma è sensibile o intuitiva, essere anch'essa sensibile o intuitiva, e non una semplice deduzione. In questo caso una relazione unica deve essere una figura unica – in termini spaziali, la linea retta che unisce i due punti.

139. Con ciò, la nostra deduzione della geometria proiettiva dalle proprietà concettuali *a priori* di una forma di esternalismo è completa. Che una forma del genere, quando si consideri come cosa indipendente, sia auto-contraddittoria, è stato reso abbondantemente evidente in tutta la discussione. Ma la scienza della forma è stata fondata sul modo opposto di considerarla: abbiamo sempre sostenuto che fosse un mero complesso di relazioni, e ne abbiamo dedotto le proprietà esclusivamente da questo punto di vista. Le molte difficoltà, nell'applicare tale deduzione *a priori* allo spazio intuitivo, e nello spiegare come necessità logiche, delle proprietà che appaiono come dati sensibili o intuitivi, devono essere rimandate al quarto capitolo. Per il momento, desidero far notare che la geometria proiettiva è completamente *a priori*; che tratta di un argomento le cui proprietà vengono logicamente dedotte dalla sua definizione, non scoperte empiricamente dai dati; e ancora che la sua definizione è fondata sulla possibilità di sperimentare la diversità nella relazione, o la molteplicità nell'unità; e che tutta la nostra scienza, quindi, è logicamente implicita e deducibile dalla possibilità di tale esperienza.

quando il piano è costruito in tal modo, la linea retta che unisce due punti qualsiasi del piano giace interamente su quel piano.

È evidente, dal procedimento della costruzione, che qualsiasi punto di OP, PQ, OQ, OP' o OQ' giace sul piano. Se possiamo dimostrare che qualsiasi punto di pq giace sul piano, avremo dimostrato tutto ciò che si richiede, dato che pq può venire trasformato per ripetizioni successive della stessa costruzione, in qualsiasi linea retta che unisce due punti del piano. Ma abbiamo visto che O, p, q ed OPQ determinano lo stesso piano. Le linee rette PQ, pq hanno quindi la stessa relazione con il piano. Ma PQ giace interamente sul piano, e quindi pq giacerà anch'essa interamente sul piano. Perciò il nostro assioma è dimostrato.

140. Nella geometria metrica, invece, otterremo un risultato molto diverso. Anche se si riscontrerà che le condizioni geometriche che rendono possibile la misurazione spaziale sono identiche, tranne che per piccole differenze nella forma dell'enunciato, agli assiomi *a priori* discussi sopra, pure, la misurazione effettiva – che ha a che fare con lo spazio realmente dato, non con la costruzione puramente intellettuale che abbiamo appena discusso – fornisce dei risultati che possono esser noti soltanto empiricamente ed approssimativamente, e non può venire dedotta da nessuna necessità del pensiero. Gli spazi euclidei e non euclidei danno i vari risultati che sono possibili *a priori*; gli assiomi propri di Euclide – che non sono esattamente degli assiomi, ma risultati empirici di misurazioni – determinano, compatibilmente con gli errori dell'osservazione, quali di queste possibilità *a priori* vengono realizzate nel nostro spazio reale. Così la misurazione ha sempre a che fare con la materia empiricamente data, non con una creatura dell'intelletto, e i suoi elementi *a priori* sono soltanto le condizioni presupposte nella possibilità della misurazione. Quali sono queste condizioni, lo vedremo nella seconda sezione di questo capitolo.

SEZIONE B. GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA METRICA

141. Adesso, abbiamo passato in rassegna gli assiomi della geometria proiettiva, ed abbiamo visto che sono deduzioni *a priori* dal fatto che possiamo sperimentare l'esternalismo, cioè una molteplicità coesistente di cose diverse ma correlate. Ma la geometria proiettiva, nonostante le sue pretese, non è tutta la scienza dello spazio, come viene sufficientemente dimostrato dal fatto che non riesce a discriminare tra spazi euclidei e non euclidei.[30] A questo fine, è necessaria la misurazione spaziale: la geometria metrica, con le sue prove quantitative, è la sola che possa effettuare tale discriminazione. Inoltre, la misurazione è necessaria in tutte le applicazioni della geometria alla fisica; la legge della gravitazione, per esempio, richiede la determinazione delle distanze reali. In breve, per molti scopi la geometria proiettiva è assolutamente insufficiente: così, essa

[30] È stata fornita sopra una dimostrazione dettagliata, cap. 1, terza proposizione. Si deve notare che qualsiasi riferimento ad elementi a distanza infinita comporta concetti metrici.

non è in grado di distinguere tra tipi diversi di coniche, anche se la loro distinzione è di fondamentale importanza in molti rami della conoscenza.

La geometria metrica, quindi, è una parte necessaria della scienza dello spazio, una parte che non è compresa nella geometria descrittiva. Il suo elemento *a priori*, tuttavia, fintantoché essa è spaziale e non aritmetica è uguale al postulato della geometria proiettiva, e precisamente l'omogeneità dello spazio, o il suo equivalente, la relatività della posizione. Possiamo vedere infatti, che l'elemento *a priori* è probabile sia lo stesso per entrambe. Perché l'*a priori* nella geometria metrica sarà tutto ciò che è presupposto nella possibilità della misurazione spaziale, cioè di un paragone spaziale quantitativo. Ma tale paragone presuppone semplicemente una identità nota della qualità, la cui determinazione è proprio il problema della geometria proiettiva. Perciò, le condizioni perché sia possibile la misurazione, fintantoché non sono aritmetiche, saranno esattamente le stesse di quelle della geometria proiettiva.

142. Quindi la geometria metrica, anche se distinta dalla geometria proiettiva, non è indipendente da essa, ma la presuppone, e deriva dalla sua combinazione con l'idea estranea di *quantità*. Ciononostante, la forma matematica degli assiomi nella geometria metrica è leggermente diversa dalla loro forma nella geometria proiettiva. L'omogeneità dello spazio è sostituita dal suo equivalente, l'assioma del libero movimento. L'assioma della linea retta è sostituito dall'assioma della distanza: due punti determinano una quantità unica, la distanza, che rimane invariata da qualsiasi movimento dei due punti come figura unica. Questo assioma, in verità, si troverà che comporta l'assioma della linea retta – una quantità del genere non potrebbe esistere tranne che i due punti non determinino una curva unica – ma la sua forma matematica è cambiata. Un altro cambiamento importante è il crollo del principio di dualità: la quantità può venire applicata alla linea retta, perché essa è divisibile in parti simili, ma non può venire applicata al punto che è indivisibile. Otteniamo così un motivo, che mancava nella geometria descrittiva, per preferire i punti alle linee rette o ai piani, quali elementi spaziali.[31] Infine, viene introdotta un'idea completamente nuova con la quantità, e precisamente l'idea del *Moto*. Non è che studiamo il moto,

[31] Cfr. sez. A, par. 115-117.

o che i nostri risultati abbiano riferimento al moto, ma essi non possono, anche se lo potevano nella geometria proiettiva, ottenersi senza almeno un moto immaginario delle figure attraverso lo spazio.

Esaminiamo ora in dettaglio i presupposti della misurazione spaziale. Troveremo tre assiomi, senza i quali questa misurazione sarebbe impossibile, e grazie ai quali è adeguata a stabilire, empiricamente ed approssimativamente, la natura euclidea o non euclidea del nostro spazio reale. Troveremo inoltre, che questi tre assiomi possono venir dedotti dal concetto di una forma di esternalismo, e non debbono nulla alla prova dell'intuizione. Essi quindi sono, come i loro equivalenti, gli assiomi della geometria proiettiva, *a priori* e deducibili dalle condizioni dell'esperienza spaziale. Questa esperienza conseguentemente, non può mai essere una prova contraria ad essi, dato che la sua stessa esistenza li presuppone.

1. *L'assioma del libero movimento.*

143. La geometria metrica, per cominciare, può definirsi la scienza che tratta della comparazione e delle relazioni tra le grandezze spaziali. Quindi, il concetto di grandezza è necessario fin dall'inizio. Alcuni degli assiomi di Euclide, conseguentemente, sono stati classificati come aritmetici, e si è supposto che non avessero niente di specifico a che fare con lo spazio. Sono gli assiomi che eguali aggiunti o sottratti da eguali danno eguali, e che cose che sono eguali alla stessa cosa sono eguali tra loro. Tali assiomi, si dice, sono puramente aritmetici, e non aggiungono, come gli altri, un attributo allo spazio. Per quanto riguarda il loro uso in aritmetica, questo è naturalmente vero. Ma quando un assioma aritmetico si deve applicare alle grandezze spaziali, deve avere qualche significato spaziale[32] e così anche questa classe, in geometria, non è *solamente* aritmetica. Fortunatamente, l'elemento geometrico è lo stesso in tutti gli assiomi di questa classe – possiamo vedere subito, infatti, che non può essere altro che una definizione della grandezza spaziale.[33] Ancora, dato che lo spazio nel cui ambito tratta la geometria è divisibile all'infinito, una definizione della grandezza spaziale si riduce a una definizione dell'eguaglianza

[32] Contrario ad Erdmann, *op. cit.*, p. 138.
[33] Cfr. Erdmann, *op cit.*, p. 164.

spaziale, perché, non appena abbiamo quest'ultima, possiamo paragonare due grandezze spaziali dividendo ognuna di esse in un certo numero di unità eguali, e contando il numero di tali unità per ciascuna.[34] Il rapporto del numero delle unità è naturalmente il rapporto che intercorre tra le due grandezze.

144. Allora, fin dall'inizio, abbiamo bisogno di qualche criterio di eguaglianza spaziale: senza un criterio del genere la geometria metrica sarebbe assolutamente impossibile. A prima vista potrebbe sembrare che questo non debba essere necessariamente un assioma, ma soltanto una semplice definizione. Ciò è in parte vero, ma non del tutto. La parte che è semplicemente una definizione, è data dall'ottavo assioma di Euclide: « Le grandezze che coincidono esattamente sono eguali ». Ma ciò fornisce un criterio sufficiente solo quando le grandezze da paragonare occupano già la stessa posizione. Quando, come avverrà di solito, le due grandezze spaziali sono esterne l'una all'altra – come in effetti deve essere, se sono distinte e non un tutto e una parte – le due grandezze possono farsi coincidere soltanto per mezzo di un movimento di una sola o di entrambe. Quindi, affinché la nostra definizione di grandezza spaziale possa fornire risultati non ambigui, la coincidenza per sovrapposizione, se può mai verificarsi, deve verificarsi sempre, qualsiasi cammino si segua per ottenerla. Perciò, se il semplice movimento potesse variare le forme, il nostro criterio di eguaglianza andrebbe a rotoli. Ne consegue che l'applicazione del concetto di grandezza alle figure nello spazio comporta l'assioma seguente: [35] *le grandezze spaziali possono muoversi da un posto all'altro senza subire distorsioni*; o, come si può altrimenti dire, *la forma non dipende in alcun modo dalla posizione assoluta nello spazio*.

L'assioma di cui sopra è l'assioma del libero movimento.[36] Mi propongo di dimostrare che (1) negare questo assioma

[34] A rigore di termini, questo metodo è applicabile soltanto ove le due grandezze siano commensurabili. Ma se prendiamo la divisibilità all'infinito rigidamente, le unità possono venire prese teoricamente tanto piccole da ottenere qualsiasi grado richiesto di approssimazione. La difficoltà è quella universale di applicare ai continui il concetto essenzialmente distinto di numero.

[35] V. Erdmann, *op. cit.*, p. 50.

[36] Detto anche l'assioma della congruenza. Ho considerato la congruenza come la *definizione* dell'eguaglianza spaziale per sovrapposizione, e quindi parlerò genericamente dell'*assioma* come libero movimento.

comporterebbe un assurdo logico e filosofico, cosicché deve essere classificato interamente *a priori*, e (2) se la geometria metrica rifiutasse questo assioma, non sarebbe in grado, senza un assurdo logico, di determinare in alcun modo la nozione di grandezza spaziale. La conclusione sarà che l'assioma non può venir dimostrato o confutato dall'esperienza, ma è una condizioni *a priori* della geometria metrica. Poiché in questo modo sosterrò un parere che è stato molto controverso, specialmente da Helmholtz ed Erdmann, dovrò impegnarmi nelle discussioni piuttosto a fondo.

145. A. *Argomentazione filosofica*. La negazione dell'assioma comporta la posizione assoluta, ed un'azione del semplice spazio *per se*, sulle cose. Perché l'assioma non asserisce che i corpi reali, quale fatto empirico effettivo, non cambiano mai di forma in nessuna modo durante lo spostamento da un luogo all'altro; al contrario, sappiamo che tali cambiamenti si verificano, a volte in grado molto notevole, e sempre fino a un certo punto. Ma tali variazioni vengono attribuite non al cambiamento di luogo di per sé, ma a cause fisiche: variazioni di temperatura, di pressione, ecc. Ciò di cui deve trattare il nostro assioma non sono i corpi materiali reali, ma le figure geometriche,[37] ed esso afferma che una figura che è possibile in una qualsiasi posizione dello spazio, è possibile in qualsiasi altra. Il suo significato diverrà più chiaro riferendoci a un caso in cui non è valido, diciamo lo spazio rappresentato dalla superficie di un uovo. Qui, un triangolo disegnato vicino all'equatore non può venire spostato senza una distorsione indispensabile, perché non potrebbe più adattarsi alla curvatura maggiore della nuova posizione; un triangolo disegnato vicino alla punta non può adattarsi all'estremità più piatta, e così via. Così il metodo di sovrapposizione, come lo impiega Euclide nel Libro I, Prop. IV, diventa impossibile; le figure non possono spostarsi liberamente, in effetti, data una figura, possiamo determinare una certa serie di posizioni possibile sull'uovo, al di fuori delle quali diventa impossibile. Ciò che affermo è, quindi, che c'è un assurdo filosofico nel supporre che lo spazio in generale sia di questa natura. Sull'uovo, abbiamo delle punte marcate, come le due estremità; lo spazio rappresentato dalla sua superficie non è omogeneo, e se in esso vi si

[37] Per il senso in cui queste figure devono essere considerate materiali, vedi la critica di Helmholtz, capitolo II, par. 69 ss.

spaziale, perché, non appena abbiamo quest'ultima, possiamo paragonare due grandezze spaziali dividendo ognuna di esse in un certo numero di unità eguali, e contando il numero di tali unità per ciascuna.[34] Il rapporto del numero delle unità è naturalmente il rapporto che intercorre tra le due grandezze.

144. Allora, fin dall'inizio, abbiamo bisogno di qualche criterio di eguaglianza spaziale: senza un criterio del genere la geometria metrica sarebbe assolutamente impossibile. A prima vista potrebbe sembrare che questo non debba essere necessariamente un assioma, ma soltanto una semplice definizione. Ciò è in parte vero, ma non del tutto. La parte che è semplicemente una definizione, è data dall'ottavo assioma di Euclide: « Le grandezze che coincidono esattamente sono eguali ». Ma ciò fornisce un criterio sufficiente solo quando le grandezze da paragonare occupano già la stessa posizione. Quando, come avverrà di solito, le due grandezze spaziali sono esterne l'una all'altra – come in effetti deve essere, se sono distinte e non un tutto e una parte – le due grandezze possono farsi coincidere soltanto per mezzo di un movimento di una sola o di entrambe. Quindi, affinché la nostra definizione di grandezza spaziale possa fornire risultati non ambigui, la coincidenza per sovrapposizione, se può mai verificarsi, deve verificarsi sempre, qualsiasi cammino si segua per ottenerla. Perciò, se il semplice movimento potesse variare le forme, il nostro criterio di eguaglianza andrebbe a rotoli. Ne consegue che l'applicazione del concetto di grandezza alle figure nello spazio comporta l'assioma seguente: [35] *le grandezze spaziali possono muoversi da un posto all'altro senza subire distorsioni*; o, come si può altrimenti dire, *la forma non dipende in alcun modo dalla posizione assoluta nello spazio.*

L'assioma di cui sopra è l'assioma del libero movimento.[36] Mi propongo di dimostrare che (1) negare questo assioma

[34] A rigore di termini, questo metodo è applicabile soltanto ove le due grandezze siano commensurabili. Ma se prendiamo la divisibilità all'infinito rigidamente, le unità possono venire prese teoricamente tanto piccole da ottenere qualsiasi grado richiesto di approssimazione. La difficoltà è quella universale di applicare ai continui il concetto essenzialmente distinto di numero.

[35] V. Erdmann, *op. cit.*, p. 50.

[36] Detto anche l'assioma della congruenza. Ho considerato la congruenza come la *definizione* dell'eguaglianza spaziale per sovrapposizione, e quindi parlerò genericamente dell'*assioma* come libero movimento.

comporterebbe un assurdo logico e filosofico, cosicché deve essere classificato interamente *a priori*, e (2) se la geometria metrica rifiutasse questo assioma, non sarebbe in grado, senza un assurdo logico, di determinare in alcun modo la nozione di grandezza spaziale. La conclusione sarà che l'assioma non può venir dimostrato o confutato dall'esperienza, ma è una condizioni *a priori* della geometria metrica. Poiché in questo modo sosterrò un parere che è stato molto controverso, specialmente da Helmholtz ed Erdmann, dovrò impegnarmi nelle discussioni piuttosto a fondo.

145. A. *Argomentazione filosofica.* La negazione dell'assioma comporta la posizione assoluta, ed un'azione del semplice spazio *per se*, sulle cose. Perché l'assioma non asserisce che i corpi reali, quale fatto empirico effettivo, non cambiano mai di forma in nessuna modo durante lo spostamento da un luogo all'altro; al contrario, sappiamo che tali cambiamenti si verificano, a volte in grado molto notevole, e sempre fino a un certo punto. Ma tali variazioni vengono attribuite non al cambiamento di luogo di per sé, ma a cause fisiche: variazioni di temperatura, di pressione, ecc. Ciò di cui deve trattare il nostro assioma non sono i corpi materiali reali, ma le figure geometriche,[37] ed esso afferma che una figura che è possibile in una qualsiasi posizione dello spazio, è possibile in qualsiasi altra. Il suo significato diverrà più chiaro riferendoci a un caso in cui non è valido, diciamo lo spazio rappresentato dalla superficie di un uovo. Qui, un triangolo disegnato vicino all'equatore non può venire spostato senza una distorsione indispensabile, perché non potrebbe più adattarsi alla curvatura maggiore della nuova posizione; un triangolo disegnato vicino alla punta non può adattarsi all'estremità più piatta, e così via. Così il metodo di sovrapposizione, come lo impiega Euclide nel Libro I, Prop. IV, diventa impossibile; le figure non possono spostarsi liberamente, in effetti, data una figura, possiamo determinare una certa serie di posizioni possibile sull'uovo, al di fuori delle quali diventa impossibile. Ciò che affermo è, quindi, che c'è un assurdo filosofico nel supporre che lo spazio in generale sia di questa natura. Sull'uovo, abbiamo delle punte marcate, come le due estremità; lo spazio rappresentato dalla sua superficie non è omogeneo, e se in esso vi si

[37] Per il senso in cui queste figure devono essere considerate materiali, vedi la critica di Helmholtz, capitolo II, par. 69 ss.

spostano delle cose, dovrà esercitare in sé un effetto di distorsione su di esse, del tutto indipendente da cause fisiche; se non esercitasse un simile effetto, le cose non potrebbero spostarsi. Così uno spazio del genere non sarebbe omogeneo, ma avrebbe delle punte marcate, in riferimento alle quali i corpi avrebbero una posizione assoluta, del tutto indipendente da altri corpi. Lo spazio non sarebbe più passivo, ma eserciterebbe un effetto ben definito sulle cose, e dovremmo adattarci alla nozione delle punte marcate nello spazio vuoto; essendo queste punte marcate non dai corpi che le occupano, ma dal loro effetto su qualsiasi corpo che potesse di volta in volta occuparle. Questa mancanza di omogeneità e di passività, è tuttavia assurda; lo spazio, dato che è una forma di esternalismo, deve permettere solo una posizione relativa, non assoluta, e deve essere completamente omogeneo in tutte le sue parti. Supporre che sia altrimenti, è attribuirgli una materialità che nessuna forma di esternalismo potrebbe assolutamente possedere. Allora, su basi puramente filosofiche, dobbiamo ammettere che una figura geometrica che è possibile in un luogo qualsiasi, sia possibile in qualsiasi altro luogo, che è l'assioma del libero movimento.

146. B. *Argomentazione geometrica.* Vediamo poi quale tipo di geometria potremmo costruire senza questo assioma. Lo standard definitivo di paragone delle grandezze spaziali, come abbiamo visto quando abbiamo presentato l'assioma, deve essere l'eguaglianza per sovrapposizione; ma da questa eguaglianza, dobbiamo dedurre l'eguaglianza quando siano separate? È stato affermato da Erdmann che, ai fini più immediati della geometria, questo non sarebbe necessario.[38] Egli ritiene che potremmo costruire una nuova geometria, in cui la misura variasse con il movimento in base a qualche legge ben definita. Tale punto di vista, come dimostrerò più avanti, comporta un errore logico circa la natura della grandezza. Ma prima di parlare di questo, discutiamo quali sono le conseguenze geometriche se se ne suppone la validità. Mettiamo che la lunghezza di un arco infinitesimale in una posizione standard sia ds; allora, in qualsiasi altra posizione p, la sua lunghezza sarebbe $ds.f(p)$, ove la forma della funzione $f(p)$ si deve supporre nota. Ma come dovremo determinare la posizione p? A questo scopo, abbiamo bisogno delle coordinate di p, cioè di qualche misurazione della distanza dall'origine. Ma la distanza dall'origine potrebbe venire misurata soltanto se supponessimo che si possa misurare secondo la legge $f(p)$. Perché, supponiamo che sia O l'origine, e Op una linea retta di cui si richiede la lunghezza. Se abbiamo un'asta di misurazione con la quale ci spostiamo lungo la linea e misuriamo gli archi infinitesimali successivi, l'asta di misurazione varierà di misura mentre ci muoviamo, cosicché un arco che sembra che misuri ds, in realtà sarà $f(s).ds$, dove s è la distanza percorsa in precedenza. Se d'altra parte muoviamo la linea Op lentamente attraverso l'origine, e ne misuriamo ogni pezzetto mentre vi transita, la nostra misura, è vero, non sarà alterata, ma adesso non abbiamo alcun mezzo per scoprire la legge secondo la quale un elemento muta la sua lunghezza quando perviene all'origine. Quindi, finché non supponiamo la funzione $f(p)$ non abbiamo alcun mezzo per determinare p, perché abbiamo appena visto che le distanze dall'origine si possono valutare soltanto a mezzo della legge $f(p)$. Ne consegue che l'esperienza non può né dimostrare né confutare la costanza delle forme durante il moto, dato che, se le forme non fossero costanti, dovremmo *supporre* la legge della loro variazione prima che fosse possibile la misurazione, e quindi la misurazione in sé non potrebbe rivelarci quella variazione.[39]

Ciononostante, a prima vista, una legge del genere, arbitrariamente presupposta, offre *effettivamente* una geometria matematicamente possibile. La proposizione fondamentale, che due grandezze che si possano sovrapporre in una posizione, possono venire sovrapposte in qualsiasi altra, vale ancora. Perché due archi infinitesimali la cui lunghezza in posizione standard sia ds_1 e ds_2, in qualsiasi altra posizione p risulterebbero di lunghezza $f(p).ds_1$ ed $f(p).ds_2$, cosicché il loro rapporto risulterebbe inalterato. Dalla costanza di questo rapporto, come sappiamo da Riemann e da Helmholtz, segue la proposizione di cui sopra. Perciò sembra che tutto ciò che richiede la geometria, quale base della misurazione, sia un assioma che l'alterazione delle forme durante il moto segue una data legge nota, come quella supposta sopra.

147. Tuttavia in questo punto di vista, come ho fatto nota-

[38] *Op. cit.*, p. 60.

[39] Il punto di vista di Helmholtz ed Erdmann, che l'esperienza meccanica è qui sufficiente anche se l'esperienza geometrica ci delude, è stato discusso sopra, cap. 2, par. 73, 82.

re sopra, vi è un errore logico circa la natura della grandezza. Questo errore è stato già indicato quando si è parlato di Erdmann,[40] e qui va soltanto brevemente ripetuto. Un giudizio sulla grandezza è essenzialmente un giudizio di paragone: quando la quantità non è misurata, è un semplice confronto del più o del meno, ma quando la grandezza è misurata, il confronto riguarda quante volte esattamente. Quindi, parlare di differenze di grandezza in un caso in cui il confronto non può rivelarle, è logicamente assurdo. Adesso, nel caso contemplato sopra, due grandezze che appaiono eguali in una posizione, appaiono eguali anche quando vengono confrontate in un'altra posizione. Non c'è senso perciò, nel supporre che le due grandezze non siano eguali quando sono separate, e neanche conseguentemente nel supporre che abbiano variato la loro grandezza col moto. L'irragionevolezza della nostra ipotesi, è la base logica dell'indeterminatezza matematica circa la legge della variazione. Allora, dato che non c'è nessun mezzo per paragonare due figure spaziali riguardo alla grandezza, tranne la sovrapposizione, l'unico assioma logicamente possibile, se la grandezza spaziale deve essere coerente a se stessa, è l'assioma del libero movimento, nella forma fornita per prima.

148. Nonostante che questo assioma sia *a priori*, la sua applicazione alla misurazione dei corpi reali, come abbiamo scoperto quando abbiamo discusso i punti di vista di Helmholtz, comporta sempre un elemento empirico.[41] Allora, il nostro assioma fornisce soltanto la condizione *a priori* per eseguire un'operazione che, in pratica, è empirica — proprio come l'aritmetica fornisce la condizione *a priori* per un censimento. Dato che questo argomento è stato discusso a fondo nel secondo capitolo, qui non dirò altro in proposito.

149. Rimangono tuttavia da discutere alcune difficoltà ed obbiezioni. Primo, come otteniamo l'eguaglianza nei solidi, e nei casi presentati da Kant del lato destro e sinistro, o delle viti filettate a destra o a sinistra, ove la sovrapposizione effettiva è impossibile? Secondo, come possiamo considerare la congruenza l'unica base possibile della misurazione spaziale, quando abbiamo di fronte il caso del tempo, dove non è concepibile una cosa come la congruenza? Terzo, si può osservare

[40] Cap. 2, par. 81.
[41] Cap. 2, par. 72.

che possiamo valutare direttamente ad occhio l'eguaglianza spaziale, con più o meno accuratezza, e così abbiamo una misura indipendente dalla conguenza. Quarto, come è possibile la geometria metrica sulle superfici non congruenti, se la congruenza è la base della misurazione spaziale? Tratterò queste obbiezioni una alla volta.

150. (1) Come misuriamo l'eguaglianza nei solidi? Questi potrebbero portarsi in congruenza effettiva soltanto se avessimo una quarta dimensione entro cui operare,[42] e da ciò che ho detto prima circa l'assoluta necessità di questa prova, potrebbe sembrare che qui veniamo abbandonati nella più completa ignoranza. Euclide tace sull'argomento, e in tutte le opere sulla geometria si suppone che sia evidente da sé che due cubi di lato eguale siano eguali. Questa supposizione suggerisce che non ci troviamo in situazione tanto disperata, come ci saremmo trovati senza la congruenza quale prova di eguaglianza in una o in due dimensioni; perché adesso possiamo almeno esser certi che i due cubi hanno i lati e le facce tutti eguali. Questi due cubi perciò non differiscono in alcuna qualità spaziale sensibile salvo la posizione, perché il volume, per lo meno in questo caso, non è una qualità sensibile. Quindi, per quanto riguarda queste qualità, essi sono indistinguibili. Se si scambiassero di posto, potremmo renderci conto del cambiamento per il colore, o per qualche altra proprietà non geometrica; ma per quanto interessa qualsiasi proprietà di cui possa prendere atto la geometria, sembrerebbe tutto come prima. Supporre una differenza di volume quindi, sarebbe come attribuire un effetto alla mera posizione, che come abbiamo visto quando abbiamo discusso il libero movimento, è inammissibile. Tranne per quanto riguarda la posizione, essi sono geometricamente indiscernibili, e possiamo chiamare in nostro aiuto l'identità degli indistinguibili per stabilire che concordano nell'unica proprietà geometrica rimanente, cioè il volume. Questo può sembrare un principio piuttosto strano da usare in matematica, e quanto alla geometria, la loro eguaglianza può forse venire considerata piuttosto una definizione; ma se chiediamo una base filosofica per questa definizione, credo che si debba trovare soltanto nell'identità degli indistinguibili. Possiamo poggiare, senza errore, la nostra *definizione* dell'eguaglianza in

[42] Contro l'opinione del Delboeuf, *L'ancienne et les nouvelles geometries*, II, « Rev. Phil. », 1894, vol. XXXVII, p. 354.

tre dimensioni, sulla congruenza a due dimensioni. Perché dato che la comparazione rispetto al volume è impossibile, siamo liberi di *definire* eguali due volumi, quando tutte le loro diverse linee, superfici, angoli e angoli solidi sono congruenti, dato che in tal caso non rimane nessuna differenza *misurabile* tra le figure che compongono i due volumi. Naturalmente, non appena abbiamo determinato questo singolo caso dell'eguaglianza dei volumi, segue il resto della teoria; che è evidente dal metodo normale dell'integrazione dei volumi, dividendoli in piccoli cubi.

Così la congruenza ci *aiuta* a stabilire l'eguaglianza tri-dimensionale, anche se non può *dimostrare* direttamente tale eguaglianza; e lo stesso principio filosofico dell'omogeneità dello spazio, con il quale era stata dimostrata la congruenza, interviene qui a salvarci. Ma che dire delle viti con la filettatura a destra e con la filettatura a sinistra? Qui, non possiamo più applicare l'identità degli indistinguibili, perché esse si possono distinguere molto bene. Ma come per i solidi, anche qui può aiutarci molto il libero movimento. Può metterci in grado, con la misurazione normale, di dimostrare che le relazioni interne di entrambe le viti sono le stesse, e che la differenza sta soltanto nella loro relazione rispetto alle altre cose nello spazio. Conoscendo queste relazioni interne, possiamo calcolare, a mezzo della geometria che il libero movimento ha reso possibile, tutte le proprietà geometriche di queste viti – raggio, punta, etc. – e possiamo dimostrare che esse sono rispettivamente eguali in entrambe. Questo tuttavia è quanto basta. È possibile la comparazione mediata, anche se non lo è quella immediata. Per esempio entrambe possono venire confrontate col cilindro al quale si adatterebbero, e così la loro eguaglianza potrebbe venir dimostrata. Una prova esattamente simile vale naturalmente per gli altri casi, lato destro e lato sinistro, triangoli sferici, etc. Nell'insieme, questi casi confermano quanto sostengo io; perché dimostrano, come Kant intendeva che dimostrassero,[43] l'essenziale relatività dello spazio.

151. (2) Riguardo al tempo, qui non è concepibile nessuna congruenza, perché per far valere la congruenza serve sempre

[43] *Prolegomena*, par. 13. V. il commentario di Vaihinger, II, pp. 518-32, specialmente pp. 521-2. Quanto sopra era lo scopo di Kant nel 1768, ma è soltanto una parte del suo scopo nei *Prolegomena*, ove doveva venire dimostrata anche la natura intuitiva dello spazio.

– come abbiamo visto nel caso dei solidi – una dimensione in più di quelle che appartengono alle grandezze paragonate. Non si può portare in coincidenza temporale un giorno con un altro, per dimostrare che essi si coprono esattamente uno con l'altro; quindi ci si riduce alla supposizione arbitraria che un movimento o un gruppo di movimenti datici nell'esperienza, siano uniformi. Fortunatamente, abbiamo un vasto gruppo di movimenti che approssimativamente concordano tutti; l'oscillazione del pendolo, la rotazione e la rivoluzione della terra e dei pianeti, etc. Essi non coincidono esattamente, ma ci portano alle leggi del moto, per mezzo delle quali siamo in grado, in base alla nostra ipotesi arbitraria, di valutare i loro piccoli discostamenti dall'uniformità; proprio come il presupporre il libero movimento ci aveva messo in grado di misurare i discostamenti dei corpi reali dalla rigidità. Ma qui come là, ci si apre, matematicamente, un'altra possibilità, che può venire esclusa soltanto per la sua assurdità filosofica; potremmo aver supposto che il gruppo di movimenti approssimativamente concordi avesse velocità che variano approssimativamente secondo una funzione del tempo arbitrariamente assunta $f(t)$, misurata da un'origine arbitraria. Un presupposto del genere li farebbe rimanere quasi altrettanto sincroni di prima, e darebbe un sistema di meccanica egualmente possibile, anche se più complesso; invece della prima legge del moto, avremmo la seguente: Una particella mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo con velocità che varia secondo $f(t)$, tranne il caso che non sia costretta a mutare quello stato per azione di forze esterne. Un'ipotesi del genere è matematicamente possibile, ma come quella simile dello spazio, è esclusa logicamente dalla natura comparativa del giudizio di quantità, e filosoficamente dal fatto che comporta il tempo assoluto, quale agente determinante del cambiamento, mentre il tempo, filosoficamente, non può mai essere altro che una forma passiva, astratta dal cambiamento. Ho introdotto questo parallelo con il tempo, non perché influisse direttamente sull'argomento, ma perché è il caso più semplice che può servire a illustrare il mio ragionamento nel caso più complesso dello spazio. Perché dato che il tempo in matematica è a una dimensione, le difficoltà matematiche sono più semplici che nella geometria; e nonostante non ci sia niente che assomigli esattamente alla congruenza, c'è un misto molto simile di necessità matematica

e filosofica che in definitiva dà un assioma interamente definito quale base della misurazione del tempo, che corrisponde alla congruenza quale base della misurazione nello spazio.[44]

152. (3) Il caso della misurazione del tempo suggerisce la terza delle obbiezioni di cui sopra alla necessità assoluta dell'assioma del libero movimento. La psico-fisica ha dimostrato che abbiamo la capacità approssimativa, a mezzo di ciò che può venir definito il senso della durata, di valutare immediatamente tempi egualmente brevi. Ciò determina una misurazione approssimativa, indipendente da qualsiasi moto uniforme supposto, e anche nello spazio, si può dire che abbiamo una capacità simile di paragone diretto. Possiamo vedere, a mezzo dell'esame diretto, che le suddivisioni su una riga graduata non sono inesatte, approssimativamente; e così si può dire sia che hanno una misura indipendente dalla congruenza, sia che possiamo accorgerci, a mezzo dell'esperienza, di qualsiasi discostamento approssimativo dal libero movimento. Contro questo punto di vista, tuttavia, c'è in partenza una obbiezione psicologica veramente fondamentale. È stato sostenuto che tutti i nostri paragoni delle grandezze spaziali procedono per sovrapposizione ideale. Così James afferma (*Psicologia*, vol. II, p. 152): « Anche quando abbiamo soltanto l'impressione che una suddivisone sia vagamente più grande o più piccola, la mente deve passare rapidamente da questa all'altra suddivisione, e ricevere l'urto sensibile diretto del più » e « in quanto le suddivisioni dello spazio sensoriale debbono venire *misurate* esattamente una rispetto all'altra, le forme oggettive che occupano una divisione verranno direttamente o indirettamente sovrapposte sulle altre ».[45]

Tuttavia, anche se tralasciamo questa obbiezione fondamentale, ne rimangono altre. Per cominciare, tali giudizi di eguaglianza sono soltanto approssimazioni molto grossolane, e non possono applicarsi a linee che superano una certa lunghezza, se non altro per il motivo che queste linee non si possono certo vedere insieme. Così questo metodo può darci una qualche certezza soltanto nelle nostre immediate vicinanze, e non potrebbe assolutamente servire per eseguire le operazioni che sarebbero necessarie per la costruzione di carte geografiche etc., e ancora meno meno per misurare le distanze astronomiche. Si potrebbe appena essere in grado di affermare che alcune linee sono più lunghe di altre, ma si lascerebbe la geometria in condizione non migliore di quella del calcolo edonistico, nel quale dipendiamo da una misura puramente soggettiva. Infatti, si riconosce che un metodo del genere è tanto poco accurato, che la riga graduata è necessità della vita quotidiana, come della scienza. Inoltre, nessuno si affiderebbe a tali giudizi diretti, se non per il fatto che la prova più rigida della congruenza in qualche misura li conferma; se non potessimo applicare questa prova, non avremmo base per fidarcene neanche quel poco. Così qui non dovrebbero esserci scappatoie dalla assoluta dipendenza dall'assioma del libero movimento.

[44] Sull'argomento della misurazione del tempo, v. la *Logica* di Bosanquet, vol. I, pp. 178-83. Dato che il tempo, nel calcolo di cui sopra, è misurato col moto, la sua misurazione presuppone quella delle grandezze spaziali.

[45] Cfr. Stumpf, *Ursprung der Raum vorstellung*, p. 68.

153. (4) È necessaria un'ultima osservazione chiarificatrice prima che la nostra dimostrazione di questo assioma possa considerarsi completa. Prima abbiamo parlato della geometria su un uovo, dove non vale il libero movimento. Mi si può chiedere, riguardo a una geometria interamente non congruente, cosa c'è di più impossibile di questa geometria sull'uovo? La risposta è ovvia. La geometria di superfici non congruenti è possibile *soltanto* con l'uso degli infinitesimali, e nell'infinitesimale tutte le superfici diventano piane. La formula fondamentale, quella della lunghezza dell'arco infinitesimale, viene ottenuta soltanto sul presupposto che tale arco possa considerarsi come una linea retta, e che nell'immediata vicinanza di qualsiasi punto possa applicarsi la geometria piana euclidea. Se non avessimo la nostra misura euclidea che potesse muoversi senza distorsione, non avremmo alcun metodo per paragonare piccoli archi in luoghi diversi, e la geometria delle superfici non congruenti cadrebbe. Così l'assioma del libero movimento, per quanto riguarda lo spazio a tre dimensioni, è necessariamente implicito e presupposto nella geometria delle superfici non congruenti; quindi la possibilità di queste ultime, è una possibilità dipendente e derivata, e non può rappresentare un argomento contrario alla necessità *a priori* della congruenza quale prova di eguaglianza.

154. Si deve notare che l'assioma del libero movimento, come l'ho enunciato io, comprende anche l'assioma al quale Helmholtz dà il nome di monodromia. Esso afferma che un corpo non modifica le sue dimensioni a seguito di una rivoluzione

completa per quattro angoli retti, ma alla fine occupa la stessa posizione che al principio. La supposta necessità matematica di creare un assioma separato per questa proprietà dello spazio, è stata confutata da Sophus Lie (v. cap. 1, par. 45); filosoficamente, è chiaro che è un caso particolare del libero movimento,[46] ed anche un caso particolarmente ovvio, perché la traslazione in effetti apporta qualche cambiamento in un corpo, e precisamente un cambiamento di posizione, ma una rotazione per quattro angoli retti si può supporre sia stata eseguita qualsiasi numero di volte senza che il risultato cambi, e l'assurdità di attribuire allo spazio la capacità di far crescere i corpi durante l'operazione, è grossolana; tutto ciò che è stato detto sopra sulla congruenza in generale, vale con evidenza ancora maggiore per questo caso speciale.

155. L'assioma del libero movimento, se deve essere vero, comporta l'omogeneità dello spazio, o l'assoluta relatività della posizione. Perché se qualsiasi forma che è possibile in una parte dello spazio sarà sempre possibile in un'altra, ne consegue che tutte le parti dello spazio sono qualitativamente simili, e perciò non possono distinguersi per nessuna proprietà intrinseca. Perciò se il nostro assioma è vero, le posizioni nello spazio devono essere definite interamente dalle relazioni esterne, cioè, *la posizione non è una proprietà intrinseca, ma puramente relativa, delle cose nello spazio*. Se esistesse una cosa come la posizione assoluta, in breve, la geometria metrica sarebbe impossibile. Questa relatività della posizione è il postulato fondamenale di tutta la geometria, cui conducono tutti gli assiomi metrici necessari, e da cui, viceversa, ciascuno di questi assiomi può venir dedotto.

156. Questa deduzione contraria, per quanto riguarda il libero movimento, non è molto difficile, e segue dall'argomento della sezione A,[47] che ricapitolerò in breve. In primo luogo, l'esternalismo è un concetto essenzialmente relativo, – nulla può essere esterno a se stesso. Essere esterno a qualcosa, è essere un'altra cosa in qualche relazione con la prima. Perciò quando si astrae la forma dell'esternalismo da ogni contenuto materiale, e la si studia isolatamente, la posizione apparirà necessariamente e puramente relativa – non può avere nessuna

[46] Come l'altro assioma di Helmholtz, che la possibilità della sovrapposizione è indipendente dal metodo seguito per ottenerla.
[47] Cfr. par. 129, 130.

qualità intrinseca, perché la nostra forma consiste di esternalismo puro, e l'esternalismo non contiene ombra né traccia di qualità intrinseche. Da ciò deriviamo il nostro postulato fondamentale, la relatività della posizione. Da questo segue l'omogeneità della nostra forma, perché una qualità in una posizione, che facesse rilevare quella posizione rispetto a un'altra, sarebbe necessariamente più o meno intrinseca, e contraddirebbe la relatività pura. Infine il libero movimento segue dall'omogeneità, perché la nostra forma non sarebbe omogenea se non consentisse in ogni parte, le forme o i sistemi di relazioni che consente in qualsiasi altra parte. Quindi, il libero movimento è proprietà necessaria di ogni possibile forma di esternalismo.

157. Nel riassumere l'argomento che abbiamo appena concluso, in conseguenza dei due paragrafi precedenti, possiamo mostrarlo nella forma di un cerchio completo. Partendo dalle condizioni della misurazione spaziale, abbiamo trovato che la comparazione necessaria per la misurazione, poteva venire effettuata soltanto per sovrapposizione. Ma abbiamo anche trovato che il risultato di tale comparazione non sarà ambiguo soltanto se le grandezze spaziali e le forme rimangono inalterate dal moto nello spazio, se in altre parole, la forma non dipende dalla posizione assoluta nello spazio. Ma questo assioma può esser valido soltanto se lo spazio è omogeneo e la posizione semplicemente relativa. Viceversa, se supponiamo che la posizione sia semplicemente relativa, un cambiamento di grandezza col moto – dato che comporta l'affermazione della posizione assoluta – è impossibile, e la nostra prova dell'eguaglianza spaziale è perciò adeguata. Ma la posizione in qualsiasi forma di esternalismo deve essere puramente relativa, dato che l'esternalismo non può essere proprietà intrinseca di niente. Quindi il nostro assioma è *a priori* in un senso duplice. È presupposto in tutte le misurazioni spaziali, ed è una proprietà necessaria di qualsiasi forma di esternalismo. Una simile duplice apriorità, come vedremo, comparirà negli altri assiomi necessari.

2. *L'assioma delle dimensioni.*[48]

158. Nel discutere l'assioma del libero movimento abbiamo visto che tutte le posizioni sono relative, cioè una posizione

[48] Questa deduzione è praticamente la stessa di quella nella sezione A, ma qui l'ho enunciata con un più specifico riferimento allo spazio e alla metrica.

esiste solo in virtù delle relazioni.[49] Ne consegue che, se la posizione può essere in qualche modo definita, lo deve essere unicamente ed esaurientemente da qualche numero finito di tali relazioni. Se la geometria deve essere possibile, deve succedere che quando sono state date abbastanza relazioni per determinare univocamente un punto, le sue relazioni con qualsiasi punto nuovo conosciuto possono dedursi dalle relazioni già date. Da ciò otteniamo quale condizione *a priori* della geometria, logicamente indispensabile alla sua esistenza, l'assioma che *lo spazio deve avere un numero finito intero di dimensioni.* Perché ogni relazione richiesta per la definizione di un punto costituisce una dimensione, e una frazione di relazione è senza significato. Il numero delle relazioni richieste deve essere finito, dato che un numero infinito di dimensioni risulterebbe praticamente impossibile da determinare. Se ricordiamo il nostro assioma del libero movimento, e ricordiamo anche che lo spazio è un continuo, possiamo stabilire il nostro assioma, per la geometria metrica, nella forma data da Helmholtz (cap. 1, par. 25): « In uno spazio a n dimensioni, la posizione di ciascun punto è univocamente determinata dalla misurazione di n variabili continue indipendenti (coordinate) ».[50]

159. Tanto necessario è quindi l'*a priori* per la geometria metrica. La restrizione delle dimensioni a tre sembra invece essere interamente opera dell'esperienza.[51] Questa restrizione non può essere necessaria logicamente, perché non appena abbiamo formulato un sistema analitico, essa appare interamente arbitraria. Perché, siamo indotti a chiedere, non possiamo aggiungere una quarta coordinata alle nostre x, y, z, né dare un significato geometrico a x^4? In questa forma più speciale, siamo tentati di considerare l'assioma delle dimensioni, alla stregua del numero degli abitanti di una città, come un fatto puramente statistico, senza nessuna necessità maggiore di quanta ne abbiano fatti del genere.

La geometria fornisce la prova intrinseca della validità della mia divisione dell'assioma delle dimensioni in una parte *a*

[49] La domanda: « Relazioni rispetto a che? » è una domanda che comporta molte difficoltà. Verrà toccata più avanti in questo capitolo, e le sarà data risposta per quanto possibile, nel quarto capitolo. Per il momento, nonostante il lampante circolo che comporta, considererò le relazioni come relazioni rispetto ad altre posizioni.

[50] *Wiss. Abh.*, vol. II, p. 614.

[51] V. Grassmann, *Ausdehnungslehre von 1844*, 2ª ed., p. XXIII.

priori ed una empirica. Perché mentre l'estensione del numero di dimensioni a quattro o a n, non cambia nulla nella geometria piana e solida, ma aggiunge soltanto un nuovo ramo che non interferisce in alcun modo col vecchio, un *qualche* numero stabilito di dimensioni è supposto in tutte le geometrie, e non è possibile immaginare una geometria che sia esente da questa supposizione.[52]

160. Dato che il punto sembra presentare qualche interesse, ripetiamo la dimostrazione dell'apriorità di questo assioma da un punto di vista leggermente diverso. Questa volta partiremo dal concetto più astratto di spazio, come si trova nella dissertazione di Riemann o nelle estensioni di Erdmann. Qui abbiamo un molteplice ordinato, divisibile all'infinito e che permette il libero movimento.[53] Come abbiamo visto, il libero movimento comporta la capacità di passare continuamente da un punto qualsiasi a un altro, in qualsiasi direzione che possiamo preferire; comporta anche che in tale sequenza, non si verificano cambiamenti tranne quelli della semplice posizione, cioè le posizioni non differiscono l'una dall'altra in nessun modo qualitativamente. (Questa assenza di differenza qualitativa è il segno distintivo dello spazio in confronto ad altri molteplici, quali i sistemi del colore e del tono; in essi ogni elemento ha un valore sensibile qualitativo ben definito, mentre nello spazio il valore sensibile di una posizione dipende interamente dalla sua relazione spaziale rispetto al nostro corpo, e così non è intrinseco, ma relativo.) Dall'assenza di differenze qualitative tra posizioni, consegue logicamente che le posizioni esistono solo in virtù delle altre posizioni: una posizione differisce dall'altra soltanto perché esse sono due, non perché vi sia qualcosa di intrinseco in ciascuna. La posizione viene così semplicemente ed unicamente definita in relazione alle altre posizioni. Quindi, qualsiasi posizione viene definita completamente quando siano state date un numero sufficiente di tali relazioni, da metterci in grado di determinare la relazione rispetto a qualsiasi nuova posizione, e questa nuova posizione viene definita dallo stesso numero di relazioni. Ora, affinché questa definizione sia comunque possibile, deve essere suf-

[52] Delboeuf, è vero, parla di geometrie a m/n dimensioni, ma non fornisce nessun riferimento (« Rev. Phil. », t. XXXVI, p. 450).

[53] Si ricorderà che nella critica di Erdmann, abbiamo visto che il libero movimento è una proprietà necessaria ai suoi fini, anche se non la considera tale.

ficiente un numero finito di relazioni. Ma ognuna di queste relazioni costituisce una dimensione. Perciò se la geometria deve essere possibile, è necessario *a priori* che lo spazio abbia un numero finito intero di dimensioni.

161. La limitazione delle dimensioni a tre, è come abbiamo visto, empirica; cionostante non è soggetta all'inesattezza ed incertezza che di solito sono proprie della conoscenza empirica. Perché le alternative che lascia la logica al senso sono poche – se le dimensioni non sono tre, debbono essere due o quattro o qualche altro numero – cosicché *piccoli* errori sono fuori discussione.[54] Da ciò, la certezza definitiva dell'assioma delle tre dimensioni, anche se in parte dovuta all'esperienza, è di ordine assolutamente diverso da quella (diciamo) della legge della gravitazione. In quest'ultima, potrebbe esistere una piccola inesattezza e rimanere inaccertata: nella prima un errore sarebbe tanto notevole che sarebbe assolutamente impossibile trascurarlo. Ne segue che la certezza dell'intero assioma, che il numero delle dimensioni è tre, è quasi altrettanto grande quanto quella dell'elemento *a priori*, dato che questo elemento lascia al buon senso una separazione ben definita tra possibilità distinte.

3. *L'assioma della distanza.*

162. Abbiamo già visto, quando abbiamo discusso la geometria proiettiva, che due punti devono determinare una curva unica, la linea retta. Nella geometria metrica, l'assioma corrispondente è che due punti devono determinare un'unica quantità spaziale, la distanza. Io mi propongo di dimostrare in ciò che segue che (1) se la distanza, come quantità completamente determinata da due punti, non esistesse, la grandezza spaziale non sarebbe misurabile; (2) la distanza può venire determinata soltanto da due punti, se nello spazio esiste una curva reale determinata da quei due punti; (3) l'esistenza di tale curva può venire dedotta dal concetto di una forma di esternalismo, e (4) l'applicazione della quantità a tale curva porta necessariamente a una certa grandezza, precisamente la distanza, determinata univocamente da due punti qualsiasi che determinano la curva. Se queste proposizioni possono venire sostenute con successo, la conclusione sarà che l'assioma della distanza è *a priori* nello stesso senso duplice dell'assioma del libero movimento, cioè è presupposto nella possibilità della misurazione, ed è necessariamente valido per qualsiasi forma di esternalismo possibile.

[54] Cfr. Riemann, *Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, nelle *Gesammelte Werke*, p. 266; anche Erdmann, *op. cit.*, p. 154.

163. (1) La possibilità della misurazione spaziale ci permette di dedurre l'esistenza di una grandezza determinata univocamente da due punti qualsiasi. La dimostrazione di ciò dipende dall'assioma del libero movimento, o dal suo equivalente, l'omogeneità dello spazio. Abbiamo visto che questi sono comportati dalla possibilità della misurazione spaziale; quindi possiamo impiegarli in qualsiasi argomentazione relativa alle condizioni di questa possibilità.

Ora, per cominciare, se la geometria deve esser possibile, due punti debbono trovarsi in *qualche* relazione uno rispetto all'altro, perché abbiamo visto che tali relazioni soltanto costituiscono la posizione o la localizzazione. Ma se due punti hanno una relazione tra loro, questa deve essere una relazione intrinseca. Perché dall'assioma del libero movimento consegue che due punti che formano una figura congruente con la coppia data, possono venire costruiti in qualsiasi parte dello spazio. Se questo non fosse possibile, abbiamo visto che la geometria metrica non potrebbe esistere. Ma entrambe queste figure possono venire considerate composte di due punti e della loro relazione; quindi, se le due figure sono congruenti ne segue che la relazione è quantitativamente eguale per entrambe le figure, dato che la congruenza è la prova dell'eguaglianza spaziale. Perciò i due punti hanno una relazione quantitativa, che è tale che possono attraversare tutto lo spazio muovendosi insieme, senza alterare in alcun modo quella relazione. Ma in un moto generale del genere, qualsiasi relazione esterna dei due punti, qualsiasi relazione che comprenda altri punti o figure dello spazio, risulterà alterata.[55] Perciò la relazione tra i due punti, rimanendo inalterata, sarà una relazione intrinseca, una relazione che non comprende nessun altro punto o figura dello spazio; e questa relazione intrinseca la chiameremo distanza.[56]

[55] Questo è soggetto, nello spazio sferico, alla modifica indicata più avanti, quando si tratta dell'eccezione all'assioma della linea retta. V. par. 168-71.

[56] Nel parlare della distanza insieme come una quantità e come una relazione intrinseca, mi preoccupo di evitare una apparente incoerenza.

164. Alla discussione di cui sopra si potrebbe obbiettare che comporta una *petitio principii*. Perché si è supposto che i due punti e la loro relazione formino una figura, con la quale possono essere congruenti altre figure. Ora, se due punti non hanno nessuna relazione intrinseca, sembrerebbe che non possano formare una figura del genere. Quindi l'argomento apparentemente presuppone ciò che doveva dimostrare. Si potrebbe chiedere, perché non sono necessari tre punti prima di ottenere una qualsiasi relazione che il libero movimento ci permetta di costruire di nuovo in altre parti dello spazio?

La risposta a questo, come alla domanda corrispondente nella prima sezione di questo capitolo, ritengo si trovi nella passività dello spazio, o nella reciproca indipendenza delle sue parti. Perché da questa indipendenza consegue che qualsiasi figura, o qualsiasi insieme di punti, può esser discussa senza riferimento ad altre figure o punti. Questo principio è la base della divisibilità all'infinito, dell'uso della quantità in geometria, e di ogni possibilità di isolare figure particolari per discuterne. Ne consegue che due punti non possono dipendere quanto alla loro relazione, da nessun altro punto o figura, perché se ne dipendessero, dovremmo supporre qualche azione di tali punti o figure sui due punti considerati, il che sarebbe in contraddizione con la reciproca indipendenza delle diverse posizioni. Per illustrare con un esempio: la relazione tra due punti dati non dipende dagli altri punti della linea retta sulla quale giacciono i punti dati. Perché soltanto attraverso la loro relazione, cioè attraverso la linea retta che determinano, gli altri punti della linea retta possono essere conosciuti in relazione particolare con la coppia data.

165. Ma perché, si può chiedere, deve esserci soltanto una unica relazione tra due punti? Perché non molte? La risposta a questo si trova nel fatto che i punti sono sostituiti interamente da relazioni, e non hanno nessuna natura propria intrinseca.[57] Un punto viene definito dalle sue relazioni con altri punti, e una volta date le relazioni necessarie alla sua definizione, non sono possibili nuove relazioni dei punti da usarsi nella definizione, perché il punto definito non ha qualità dalle quali potrebbero derivare tali relazioni. Adesso, una relazione rispetto a qualsiasi altro punto è buona per la definizione quanto lo sarebbero più relazioni, dato che per quante ne possiamo avere, rimarrebbero tutte invariate in un moto combinato dei due punti. Perciò, può esistere soltanto una relazione determinata da due punti qualsiasi.

Ho parlato del giudizio della quantità, sempre, come di un giudizio di paragone; allora, come può essere intrinseca una quantità? La risposta è che nonostante la misurazione e il giudizio sulla quantità esprimano il risultato del paragone, pure i termini paragonati devono esistere prima del paragone, in questo caso i termini paragonati per misurare le distanze, cioè per paragonarle *inter se* sono relazioni intrinseche tra punti. Così nonostante che la *misurazione* della distanza comporti un riferimento ad altre distanze, e la sua espressione come grandezza richieda un tale riferimento, pure la sua esistenza non dipende da un riferimento esterno, ma esclusivamente dai due punti di cui è la distanza.

166. (2) Abbiamo così stabilito la nostra prima proposizione – due punti hanno una relazione ed una soltanto, univocamente determinata da quei due punti. Questa relazione, la chiamiamo distanza. Rimangono da considerare le condizioni della misurazione della distanza, cioè fin dove il valore unico della distanza comporti una curva univocamente determinata dai due punti.

In primo luogo, nella nozione di cui sopra del moto combinato dei due punti, o di due altri punti che formino una figura congruente ai primi due, è comportata una qualche curva che unisca i due punti. Perché senza una qualche curva del genere, non si può sapere che le due coppie di punti sono congruenti, e nemmeno possiamo avere nessuna prova a mezzo della quale scoprire quando una coppia di punti si muove come una figura unica.[58] Perciò la distanza deve essere misurata da qualche linea che unisce i due punti. Ma è necessario che essa sia una linea che i due punti determinano completamente?

167. Noi siamo abituati alla definizione della linea retta come la distanza *più breve* tra due punti, il che implica che la

[57] V. la fine della discussione sul libero movimento, par. 155 ss.

[58] Nella *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, di Frischauf, vi è una serie di definizioni che iniziano dalla sfera come il luogo delle coppie di punti congruenti quando un punto della coppia è fisso, e che da questa arrivano al cerchio e alla linea retta. Da quanto sopra consegue che la sfera così definita comporta già una curva tra i punti della coppia di punti, a mezzo della quale le diverse coppie di punti possono venire riconosciute come congruenti; e come procediamo, apparirà che questa curva deve essere una linea retta. La definizione di Frischauf a mezzo della sfera comporta quindi un circolo vizioso, dato che la sfera presuppone la linea retta, quale prova delle coppie di punti congruenti.

distanza potrebbe venir misurata egualmente bene da linee curve. Io ritengo che questa implicazione sia falsa, per i motivi seguenti. Quando parliamo della lunghezza di una curva, possiamo dare significato alle nostre parole soltanto se si suppone che la curva sia divisa in archi rettilinei infinitesimali, la cui somma fornisce la lunghezza di una linea retta equivalente; così, a meno che non presupponiamo la linea retta, non abbiamo alcun modo per paragonare le lunghezze di curve diverse, e perciò non potremo mai scoprire la validità della nostra definizione. Si potrebbe forse pensare che sia possibile usare quale base di misurazione, qualche altra linea, diciamo un cerchio. Ma per poter valutare in questo modo la lunghezza di qualsiasi curva diversa da un cerchio, dovremmo dividere la curva in archi circolari infinitesimali. Ora, due punti successivi non determinano un cerchio, cosicché un arco di due punti avrebbe una lunghezza indeterminata. È vero che se escludiamo i raggi infinitesimali dei cerchi di misurazione, la lunghezza degli archi infinitesimali sarebbe determinata anche se i cerchi variassero, ma ciò avviene soltanto perché tutti i piccoli archi circolari che passano per due punti consecutivi coincidono con la linea retta che passa per i due punti. Così, anche con l'aiuto della restrizione arbitraria ad un raggio finito, tutto ciò che succede è che veniamo riportati alla linea retta. Se per correre ai ripari, prendiamo tre punti consecutivi della nostra curva, e calcoliamo la distanza secondo l'arco del cerchio di curvatura, la nozione di distanza perde la sua proprietà fondamentale d'essere una relazione tra *due* punti. Perché allora, non si potrebbe dire che due punti consecutivi dell'arco hanno una distanza corrispondente tra loro — sarebbero necessari tre punti prima di poter applicare la nozione di distanza. Così il cerchio non è una base di misurazione possibile, e obbiezioni simili valgono naturalmente e con forza maggiore, rispetto a qualsiasi altra curva. Tutta questa argomentazione è volta a dimostrare in dettaglio, l'impossibilità logica della misurazione della distanza a mezzo di qualsiasi curva che non venga completamente definita dai due punti la cui distanza è richiesta. Se in quanto precede, avessimo preso la distanza misurata secondo cerchi di *dato raggio*, avremmo introdotto nella sua definizione una relazione con altri punti oltre i due dei quali doveva venire misurata la distanza, il che abbiamo visto che è un errore logico. Inoltre, come possiamo sapere che tutti i cerchi hanno raggi eguali, finché non abbiamo una misurazione indipendente della distanza?

168. Quindi una linea retta non è la distanza *più breve*, ma è semplicemente *la* distanza tra due punti — finora, questa conclusione è rimasta valida. Ma supponiamo di avere due o più curve che passano per due punti, e che tutte queste curve siano congruenti *inter se*. Allora, in accordo con la definizione dell'eguaglianza spaziale, diremmo che le lunghezze di tutte quelle curve sono eguali. Ora potrebbe accadere che nonostante nessuna delle curve fosse determinata univocamente dai due punti estremi, pure venisse determinata la lunghezza comune di tutte le curve. In questo caso, cosa ci impedirebbe di chiamare questa lunghezza comune distanza, anche se nello spazio non le corrispondesse nessuna figura unica? Questo è il caso contemplato dalla geometria sferica, dove, come su una sfera, gli antipodi possono venire uniti da un numero infinito di geodetiche, che hanno tutte la stessa lunghezza. Quindi la supposta difficoltà non è puramente immaginaria, ma è una difficoltà che la geometria moderna ci costringe a fronteggiare. Conseguentemente, la discuterò piuttosto a lungo.

169. Per cominciare, devo far notare che il mio assioma non è proprio equivalente a quello di Euclide. L'assioma di Euclide dice che due linee rette non possono racchiudere uno spazio, cioè non possono avere più di un punto in comune. Ora, se ogni coppia di due punti, senza eccezione, determina un'unica linea retta, ne consegue naturalmente che due linee rette diverse possono avere soltanto un punto in comune — e fin qui i due assiomi sono equivalenti. Ma può succedere, come nello spazio sferico, che due punti *in generale* determinino un'unica linea retta, ma non lo facciano quando uno rispetto all'altro si trovano nella relazione speciale di antipodi. In un sistema del genere ogni coppia di linee rette nello stesso piano si incontra in due punti, che sono gli uni gli antipodi degli altri; ma due punti *in generale* determinano ancora un'unica linea retta. Perciò siamo ancora in grado di ottenere distanze da linee rette uniche, eccetto nei casi limite; e in quei casi, possiamo prendere qualsiasi punto intermedio tra i due antipodi, unirlo con la *stessa* linea retta ad entrambi gli antipodi, e misurarne la distanza dagli antipodi nel modo abituale. La somma di queste distanze darà allora un valore unico alla distanza tra gli antipodi.

Così anche nello spazio sferico, ci è di grande aiuto l'assioma della linea retta; tutte le misurazioni lineari vengono effettuate suo tramite, e i casi che fanno eccezione possono venire trattati, con il suo aiuto, secondo i metodi usuali per i limiti. Quindi lo spazio sferico non è così contrario come pareva da principio, alla necessità *a priori* dell'assioma. Ciononostante, finora non abbiamo toccato il punto cruciale dell'obbiezione che lo spazio sferico suggeriva. Vi dobbiamo dunque passare.

170. Si ricorderà che, nella nostra dimostrazione *a priori* che due punti devono trovarsi in una determinata relazione, abbiamo sostenuto che era impossibile che quei due punti avessero, rispetto allo spazio rimanente, una relazione che rimanesse inalterata col moto. Ora, nello spazio sferico, e nel caso particolare che i due punti siano antipodi, essi *hanno* una relazione rispetto allo spazio rimanente, che rimane inalterata dal moto – e precisamente la relazione che la loro distanza è metà della circonferenza dell'universo. Nella nostra discussione precedente, abbiamo supposto che qualsiasi relazione rispetto allo spazio esterno deve essere una relazione di posizione – e una relazione di posizione verrà alterata dal moto. Ma in uno spazio finito nel quale abbiamo una grandezza assoluta, diventa possibile un'altra relazione, e precisamente una relazione di grandezza. I punti agli antipodi, quindi, come i punti coincidenti, non determinano più un'unica linea retta. Ed è istruttivo notare che di conseguenza, vi è un'ambiguità nell'espressione della distanza come l'ambiguità usuale nella misurazione degli angoli. Se supponiamo che la costante spaziale sia $1/k^2$, e d un valore della distanza tra due punti, $2\pi kn \pm d$, ove n sia un intero qualsiasi sarà un valore egualmente buono. In breve, la distanza è una funzione periodica come un angolo. Così, un tale stato di cose conferma piuttosto che negare ciò che sostengo, che la distanza dipende da una curva determinata unicamente da due punti. Perché non appena lasciamo cadere questa determinazione unica, vediamo che fanno capolino delle ambiguità nella nostra espressione della distanza. La distanza ha ancora una serie di valori *distinti*, in corrispondenza del fatto che dato un punto, la linea retta viene determinata univocamente rispetto a tutti gli altri punti tranne uno, quello agli antipodi. Siamo tentati di andare oltre ed affermare: se per *ciascuna* coppia di punti passasse un numero infinito delle curve usate per misurare la distanza, la distanza sarebbe in

grado, per la medesima coppia di punti, di prendere non solo una serie separata, ma una serie infinita *continua* di valori.

171. Questa comunque, è pura speculazione. Giungo adesso al *pièce de resistance* della mia argomentazione. Come abbiamo visto, l'ambiguità nello spazio sferico derivava da una relazione di grandezza rispetto allo spazio rimanente – poiché tale relazione rimaneva inalterata dal moto dei due punti, e quindi cadeva al di fuori del nostro ragionamento introduttivo. Ma cos'è questa relazione di grandezza? Semplicemente una relazione della *distanza* tra i due punti rispetto a una *distanza* data dalla natura dello spazio in questione. Ne consegue che una relazione del genere *presuppone* una misura della distanza e quindi non serve che venga contemplata in qualsiasi discussione che tratti dei requisiti *a priori* per la possibilità di distanze determinate.[59]

172. Adesso ho dimostrato, spero in modo conclusivo, che lo spazio sferico non presenta obbiezioni all'apriorità del mio assioma. Due punti qualsiasi hanno una relazione, la loro distanza, che è indipendente dallo spazio rimanente, e questa relazione richiede, quale sua misura, una curva determinata univocamente da quei due punti. Avrei potuto prendere il toro per le corna, ed affermare: Due punti non *possono* avere altra relazione che quella data dalle linee che li uniscono, e quindi, se hanno una relazione indipendente dal resto dello spazio, vi sarà una linea che li unisce, che essi determinano completamente. Così James dice: [60]

« Proprio come nel campo della quantità, la relazione tra due numeri è un altro numero, nel campo dello spazio le relazioni sono fatti dello stesso ordine dei fatti cui sono posti in relazione... Quando parliamo della relazione della direzione di due punti uno verso l'altro, intendiamo semplicemente la sensazione della linea che unisce insieme i due punti. *La linea è la relazione...* La relazione di posizione tra i punti di cima e di fondo di una linea verticale, è quella linea e nient'altro ».

Se fossi stato disposto ad adottare questa dottrina fin dall'i-

[59] E neanche in qualsiasi discussione che come quelle della geometria proiettiva, eviti del tutto la nozione di grandezza o di distanza. Ne segue che le proposizioni della geometria proiettiva, valgono senza riserve per lo spazio sferico, dato che l'eccezione all'assioma della linea retta deriva soltanto da basi metriche.

[60] *Psychology*, vol. II, p. 149-50.

nizio, avrei potuto evitare ogni discussione. Una relazione unica tra due punti in questo caso *deve* comportare una linea unica tra di essi. Ma mi è sembrato meglio evitare una dottrina che non è accettata universalmente, tanto più che io mi accostavo al problema dal lato logico e non da quello psicologico. Comunque, dopo aver liquidato le obbiezioni, è interessante trovare questa conferma della teoria di cui sopra, da un punto di vista tanto diverso. In effetti, credo che la dottrina di James potrebbe dimostrarsi una necessità logica, oltre che un fatto psicologico. Perché, che sorta di cosa può essere una relazione spaziale tra due punti distinti? Deve essere qualcosa di spaziale, e dato che i punti sono costituiti interamente dalle loro relazioni, deve essere qualcosa di almeno altrettanto reale e tangibile dei punti che mette in relazione. Pare che non vi sia nulla che possa soddisfare queste esigenze, se non una linea che li unisce. Perciò, ancora una volta, una relazione unica deve comportare una linea unica. Cioè la grandezza lineare è logicamente impossibile a meno che lo spazio non consenta curve determinate univocamente da due qualsiasi dei loro punti.

173. (3) Ma inoltre, l'esistenza di curve determinate univocamente da due punti può venir dedotta dalla natura di una qualsiasi forma di esternalismo.[61] Perché, quando abbiamo discusso il libero movimento, abbiamo visto che questo assioma, insieme all'omogeneità e alla relatività della posizione, può venire così dedotto, e all'inizio della nostra discussione sulla distanza, abbiamo visto che l'esistenza di una relazione unica tra due punti poteva essere dedotta dall'omogeneità dello spazio. Possiamo dire che dato che la posizione è relativa, due punti qualsiasi debbono avere *qualche* relazione l'uno con l'altro: dato che la nostra forma di esternalismo è omogenea, questa relazione può mantenersi invariata mentre i due punti si muovono entro la forma, cioè cambiano le loro relazioni rispetto ad altri punti; perciò la loro relazione reciproca è una relazione intrinseca, indipendente dalla loro relazione con altri punti. Ma dato che la nostra forma è un semplice complesso di relazioni, una relazione di esternalismo deve apparire nella

[61] Questo passaggio della discussione è stato trattato molto brevemente, dato che è una mera ripetizione del corrispondente argomento della sezione A, e viene inserito qui soltanto per amore di completezza logica. Vedi par. 137 ss.

forma con la stessa evidenza di qualsiasi altra cosa nella forma; così se la forma è intuitiva o sensibile, la relazione dovrà presentarsi immediatamente, e non sarà una semplice deduzione. Perciò la relazione intrinseca tra due punti deve essere una figura unica nella nostra forma, cioè in termini spaziali, la linea retta che unisce i due punti.

174. (4) Infine, dobbiamo dimostrare che l'esistenza di una tale curva, quando si applica la quantità alla relazione tra due punti, porta necessariamente a una grandezza unica, che questi due punti determinano completamente. Con ciò, saremo riportati alla distanza, dalla quale siamo partiti, e completeremo il cerchio del nostro argomento.

Nella sez. A, paragrafo 119, abbiamo visto che la figura formata da due punti è proiettivamente indistinguibile da quella formata da due altri punti qualsiasi sulla stessa linea retta; la figura, in entrambi i casi, da un punto di vista proiettivo, è semplicemente la linea retta sulla quale giacciono i due punti. La differenza di relazione nei due casi, non è qualitativa, poiché la geometria proiettiva non può trattarne; tuttavia esiste qualche differenza di relazione. Per esempio, se un punto viene mantenuto fisso, mentre l'altro si muove, c'è ovviamente un qualche cambiamento nella relazione. Questo cambiamento, dato che tutte le parti della linea retta sono qualitativamente simili, sarà un cambiamento di quantità. Perciò se due punti determinano una figura unica, deve esistere, per la distinzione tra i vari altri punti di questa figura, una relazione quantitativa unica tra i due punti che la determinano, e quindi, dato che questi due punti sono arbitrari, fra due punti soltanto. Questa relazione è la *distanza*, con la quale iniziò la nostra discussione, ed alla quale infine ritorna.

175. Per riassumere: se i punti vengono definiti semplicemente dalle relazioni con altri punti, cioè se ogni posizione è relativa, *ciascun punto deve aver rispetto a ogni altro punto una e una sola relazione indipendente dallo spazio rimanente. Questa relazione è la distanza tra i due punti.* Adesso, una relazione tra due punti può venire definita soltanto da una linea che li unisce — anzi, si può anche sostenere che una relazione può *essere* soltanto una linea che li unisce. Perciò una relazione unica comporta una linea unica, cioè una linea determinata da due qualsiasi dei suoi punti. Solo in uno spazio che ammette una linea del genere, la grandezza lineare è un concetto logi-

camente possibile. Ma una volta che abbiamo stabilito la possibilità *in generale*, di tracciare queste linee, e quindi di misurare la grandezza lineare, possiamo riscontrare che una certa grandezza ha una relazione particolare rispetto alla costituzione dello spazio. Può accadere che la linea retta sia di lunghezza finita, e in questo caso la sua lunghezza darà una certa grandezza speciale, la costante spaziale. Due punti agli antipodi, cioè due punti che bisecano tutta la linea retta, avranno allora una relazione di grandezza che, anche se invariata col moto, è resa particolare da una certa relazione costante rispetto allo spazio rimanente. Questa particolarità presuppone una misura della grandezza lineare in generale, e quindi non può rovesciare l'apriorità dell'assioma della linea retta. Ma per i punti che hanno la speciale relazione di antipodi uno rispetto all'altro, essa distrugge l'argomentazione che dimostrava che la relazione tra due punti, dato che rimaneva invariata col moto, non poteva avere riferimento al resto dello spazio. Così è comprensibile che l'assioma non valga per questi punti speciali, e tra essi sia possibile un numero infinito di linee rette: ma a meno che non fossimo partiti col supporre la validità generale dell'assioma, non avremmo mai potuto raggiungere una posizione in cui sarebbe stato possibile sapere che i punti agli antipodi sono speciali, o invero, una posizione che ci avrebbe messo in grado di fornire una qualsiasi definizione quantitativa dei punti specifici.

La distanza e la linea retta, come relazioni determinate unicamente da due punti, sono così necessarie *a priori* alla geometria metrica. Ma esse sono inoltre proprietà che devono appartenere a qualsiasi forma di esternalismo. Dato che la loro necessità per la geometria è stata dedotta dall'omogeneità e dalla relatività della posizione, e dato che queste sono proprietà necessarie di qualsiasi forma di esternalismo, la stessa argomentazione dimostra entrambe le conclusioni. Così otteniamo, come nel caso del libero movimento, una apriorità duplice: l'assioma della distanza, e la sua implicazione, l'assioma della linea retta, sono da una parte presupposti nella possibilità della grandezza spaziale, e perciò non possono venire contraddetti da qualsiasi esperienza che risulti dalla misurazione dello spazio; mentre d'altra parte, sono conseguenze delle proprietà necessarie di qualsiasi forma di esternalismo che deve rendere possibile l'esperienza di un mondo esterno.

176. In relazione alla linea retta, converrà discutere le con-

dizioni di un sistema di coordinate metriche. Il sistema delle coordinate proiettive, come abbiamo visto, mira soltanto a una nomenclatura conveniente per punti diversi, e può venire istituito senza introdurre la nozione della quantità spaziale. Ma un sistema di coordinate metriche fa molto di più. Definisce ciascun punto quantitativamente, a mezzo delle sue relazioni spaziali quantitative rispetto a una certa figura coordinata. Soltanto quando in questo modo il sistema di coordinate è metrico, cioè quando ciascuna coordinata rappresenta una qualche grandezza spaziale, che è essa stessa una relazione del punto definito rispetto a qualche altro punto o figura – le operazioni con le coordinate possono portare a un risultato metrico. Quando, come nella geometria proiettiva, le coordinate non sono grandezze spaziali, nessuna trasformazione potrà dare un risultato metrico. Desidero dimostrare qui che un sistema di coordinate metriche comporta necessariamente la linea retta, e non può, senza un errore logico, venire istituito su nessun'altra base. Come abbiamo visto, il sistema delle coordinate proiettive è basato interamente sulla linea retta; ma il sistema metrico è più importante, dato che le sue quantità contengono informazioni effettive circa le grandezze spaziali mentre nella geometria proiettiva non è così.

In primo luogo, le coordinate metriche di un punto costituiscono una definizione quantitativa completa di esso; adesso un punto può venire definito solamente, come abbiamo visto, dalle sue relazioni con altri punti, e queste relazioni possono venire definite soltanto a mezzo della linea retta. Conseguentemente, qualsiasi sistema metrico di coordinate deve comportare la linea retta, quale base della sua definizione dei punti.

Questo argomento *a priori* tuttavia, anche se credo che sia abbastanza fondato, non è probabile che riesca a convincere chiunque sia persuaso dell'opposto. Perciò, esaminiamo in dettaglio i sistemi di coordinate metriche e dimostriamo per ciascun caso, la loro dipendenza dalla linea retta.

Abbiamo già visto che la nozione della distanza è impossibile senza la linea retta. Non possiamo perciò definire le nostre coordinate in nessuna delle maniere usuali, come distanza da tre piani, linee, punti, sfere o qualcos'altro. Le coordinate polari sono impossibili dato che – rinunziando alla rettilinearità del raggio vettore – la lunghezza del raggio vettore diventa senza significato. Le coordinate triangolari comportano non solo gli angoli, che al limite devono essere retti, ma le linee ret-

te, o se non altro, delle curve ben definite. Ora le curve possono venire definite metricamente soltanto in due modi: *O* secondo la relazione rispetto alla linea retta, come per esempio la curvatura in un punto qualsiasi, *o* secondo equazioni puramente analitiche che presuppongono un sistema intellegibile di coordinate metriche. Quali metodi rimangono per assegnare tali valori arbitrari a punti diversi? Anzi, come potremo ottenere una qualsiasi valutazione della differenza – per evitarre la nozione più specifica della distanza – tra due punti? Quando abbiamo un sistema di coordinate possiamo definire un punto per mezzo delle sue tre coordinate; in assenza di un tale sistema, possiamo definire la nozione di punto *in generale*, come l'intersezione di tre superfici o di due curve. Qui accettiamo le superfici e le curve come nozioni che l'intuito rende chiare, ma se desideriamo che ci forniscano una definizione numerica esatta di punti *specifici*, dobbiamo specificare il tipo di superficie o di curva da usare. Adesso, come abbiamo visto, ciò è possibile soltanto quando si presupponga o la linea retta, o un sistema di coordinate. Ne consegue che ciascun sistema di coordinate presuppone la linea retta, ed è logicamente impossibile senza di essa.

177. Abbiamo visto che i tre assiomi di cui sopra sono necessari *a priori* alla geometria metrica. Non possono esserne necessari altri, dato che i sistemi metrici, logicamente inattaccabili quanto quello di Euclide, che trattano di spazi egualmente omogenei ed egualmente relativi, sono stati costruiti dai metageometri senza l'aiuto di nessun altro assioma. Gli assiomi rimanenti della geometria euclidea – l'assioma delle parallele, l'assioma che il numero delle dimensioni è tre, e la forma data da Euclide all'assioma della linea retta (due linee rette non possono racchiudere uno spazio) – non sono indispensabili alla possibilità della geometria metrica, cioè non sono deducibili dal fatto che è possibile una scienza delle grandezze spaziali. Essi devono venire considerati piuttosto come leggi empiriche ottenute, come le altre leggi empiriche delle altre scienze, dalla effettiva ricerca sulla materia data – in questo caso, lo spazio dell'esperienza.

178. Nel riassumere l'argomento specifico di questa sezione possiamo dargli una forma più generale e discutere le condizioni della misurazione in qualsiasi molteplice continuo, cioè

le qualità necessarie al molteplice affinché le sue quantità possano essere determinabili, non solo relativamente al più o al meno, ma esattamente al quanto.

Possiamo dire che la misurazione è l'applicazione del numero ai continui, o se lo preferiamo, la trasformazione della semplice quantità in un numero di unità. Usando la *quantità* per denotare un vago più o meno, e la *grandezza* per denotare il numero esatto di unità, il problema della misurazione può definirsi la trasformazione della quantità in grandezza.

Ora un numero, tanto per cominciare, è un insieme che consiste di unità più piccole, tutte queste unità essendo qualitativamente simili. Quindi, perché una quantità continua possa venire espressa come un numero, deve da una parte essere essa stessa un insieme, e d'altra parte deve essere divisibile in parti qualitativamente simili. Presa come un insieme, la quantità è *intensiva*; presa come un aggregato di parti, essa è *estensiva*. Quindi, una quantità puramente intensiva non è numerabile – una quantità puramente estensiva, se fosse possibile immaginarne una, non sarebbe assolutamente una quantità unica, dato che dovrebbe consistere di particolari completamente insintetizzati. Perciò una quantità misurabile è un intero divisibile in parti simili. Ma una quantità continua se è divisibile in qualche modo, deve essere divisibile *all'infinito*. Perché altrimenti, i punti nei quali potrebbe venire divisa, formerebbero delle barriere naturali, e così ne distruggerebbero la continuità. Ma inoltre, non è sufficiente che debba sussistere la possibilità di divisione in parti reciprocamente esterne; mentre le parti, per essere percettibili quali parti, devono essere reciprocamente esterne, perché si possa sapere che sono parti *eguali*, esse devono anche essere in grado di superare il reciproco esternalismo. Per questo, come abbiamo visto, abbiamo bisogno della sovrapposizione, che comporta il libero movimento e l'omogeneità – l'assenza del libero movimento nel tempo, ove tutti gli altri requisiti della misurazione sono rispettati, rende impossibile la misurazione diretta del tempo. Perciò la divisibilità all'infinito, il libero movimento, e l'omogeneità sono necessari per la possibilità della misurazione in un molteplice continuo *qualsiasi*, e questi, come abbiamo visto, sono equivalenti ai nostri tre assiomi. Tali assiomi sono quindi necessari non solo per la misurazione spaziale, ma per qualsiasi misurazione. L'unico molteplice dato all'esperienza, in cui queste condizioni vengono soddisfatte, è lo spazio. O-

gni altra misurazione esatta – come credo che possa venire dimostrato per ciascun caso distinto – viene effettuata, come abbiamo visto nel caso del tempo, per trasformazione in un correlativo spaziale. Questo spiega la fondamentale importanza, per la scienza esatta, dell'aspetto dinamico della natura, che riduce tutti i fenomeni a movimenti nel tempo e nello spazio. Perché di tutti i concetti, il numero è quello più facile da usare, e la scienza cerca ovunque la possibilità di applicarlo, ma trova questa possibilità soltanto a mezzo degli equivalenti spaziali dei fenomeni.[62]

179. Adesso abbiamo visto in cosa consiste l'elemento *a priori* della geometria. Questo elemento *a priori* può definirsi negli assiomi comuni agli spazi euclidei e non euclidei, negli assiomi deducibili dal concetto di una forma di esternalismo o – per la geometria metrica – negli assiomi necessari per la possibilità della misurazione. Rimangono da discutere, nel capitolo finale, alcune questioni di natura filosofica più generale, in cui dovremo abbandonare il terreno solido della matematica, per addentrarci in speculazioni che io avanzerò molto timidamente e con scarsa speranza che siano definitivamente valide. Le questioni principali trattate in questo capitolo finale saranno due: 1) Come è possibile una tale necessità *a priori* e puramente logica, applicata a una materia realmente data come lo spazio? 2) Come possiamo eliminare le contraddizioni che ci hanno perseguitato in questo capitolo, e che sorgevano dalla relatività, dalla divisibilità all'infinito e dalla estensione illimitata dello spazio? Queste due domande ci sono imposte dal presente capitolo, ma poiché aprono alcuni dei problemi fondamentali della filosofia, sarebbe affrettato aspettarsi una risposta conclusiva o interamente soddisfacente. Si può sperare in qualche accenno e suggerimento, ma una soluzione completa potrebbe ottenersi soltanto da una filosofia completa, la cui prospettiva è troppo esigua per incoraggiare uno stato d'animo fiducioso.

[62] Cfr. Hannequin, *Essai critique sur l'hypothese des atomes*, Paris, 1895, passim.

4. CONSEGUENZE FILOSOFICHE

180. Nel presente capitolo dobbiamo discutere due questioni che, anche se poco geometriche, sono di fondamentale importanza per la teoria della geometria proposta sopra. La prima di tali questioni è questa: Quale relazione può avere una dimostrazione puramente logica e deduttiva come quella della natura di una forma di esternalismo, rispetto a una materia data all'esperienza come lo spazio? Mi si può dire che ho semplicemente delineato un concetto generale, che contiene lo spazio come una specie particolare, e che poi ho dimostrato ciò che avrebbe dovuto essere ovvio fin dall'inizio, che questo concetto generale conteneva alcuni degli attributi dello spazio. Ma quale base fornisce ciò, perché questi attributi vengano ritenuti *a priori*? Il concetto di mammifero possiede alcuni degli attributi di un cavallo; ma questi attributi sono perciò una qualità *a priori* del cavallo? La risposta a questa obbiezione ovvia è tanto difficile e comporta tanta filosofia generale, che l'ho lasciata per il capitolo finale, perché non interrompesse la discussione relativa agli aspetti specificamente geometrici.

181. Ho già indicato in termini generali il fondamento per considerare come *a priori* le proprietà di qualsiasi forma di esternalismo. Questo fondamento è trascendentale, cioè va ricercato nelle condizioni necessarie alla possibilità dell'esperienza. La forma di esternalismo, come i molteplici di Riemann, è un concetto di classe generale che include il tempo e gli spazi euclidei e non euclidei. Comunque, non è motivata, come i molteplici, da una somiglianza quantitativa con lo spazio, ma dal fatto che, se ha più di una dimensione, adempie tutte quelle funzioni che nel nostro mondo reale, vengono adempiute dallo spazio. Ma una forma di esternalismo, per poter effettuare questo, deve essere non un mero concetto, ma un'intuizione realmente sperimentata. Perciò il concetto di una forma del genere è un *concetto* generale che contiene entro di sé

ogni *intuizione* logicamente possibile, che può svolgere la funzione svolta nella realtà dallo spazio. E questa funzione è quella di rendere possibile l'esperienza di cose diverse ma correlate. Allora, nella percezione sensoriale, è *a priori* necessaria qualche forma il cui concetto sia incluso nella nostra forma di esternalismo, per l'esperienza della diversità nella relazione, e senza un'esperienza di questo tipo, come mostra la logica moderna, non dovremmo avere nessuna esperienza. Ciò lascia ancora intatta la relazione tra l'*a priori* e il soggettivo; la forma dell'esternalismo è necessaria all'esperienza, ma non deve *per quel motivo* dichiararsi puramente soggettiva. Naturalmente, la necessità dell'esperienza può sorgere soltanto dalla natura della mente che sperimenta; ma non ne segue che le condizioni necessarie possano venire rispettate, a meno che il mondo oggettivo abbia certe proprietà. Possiamo affermare tranquillamente che il *fondamento* della necessità proviene dalla mente; ma non ne consegue assolutamente che la *validità* di ciò che è necessario dipenda soltanto dalla costituzione della mente. Ove non fosse così, la nostra conclusione quando una singola conoscenza è stata dichiarata *a priori* può essere soltanto: A causa della costituzione della *mente*, l'esperienza sarà impossibile a meno che il *mondo* non abbia certi attributi.

Sarà questo per grandi linee, l'argomento della prima metà di questo capitolo; e questa sarà la giustificazione per considerare *a priori* gli assiomi della geometria, che abbiamo dedotto sopra dal concetto di una forma di esternalismo. Perché questi assiomi, e solo questi, valgono necessariamente in qualsiasi mondo in cui è possibile l'esperienza.

182.[1] Naturalmente il punto di vista suggerito ha molto in comune con l'estetica trascendentale. In effetti, credo che possa venire desunto per intero da una certa limitazione ed interpretazione degli argomenti classici di Kant. Ma poiché esso differisce in molti punti importanti, dalle conclusioni cui mirava Kant, e poiché può facilmente apparire che esista una concordanza maggiore di quella che è, inizierò con un breve paragone e cercherò, facendo riferimento a critiche autorevoli, di stabilire la legittimità della mia divergenza nei suoi riguardi.

183. In primo luogo, l'elemento psicologico è molto più e-

[1] Confronta con i seguenti paragrafi la mirabile discussione nella *Teoria della conoscenza* di Hobhouse (Methuen, 1896) parte I, cap. II.

steso nella tesi di Kant che nella mia. È vero che io sosterrò che una forma di esternalismo, se deve svolgere il suo lavoro, non deve essere un mero concetto o una mera deduzione, ma deve essere un elemento dato alla percezione dei sensi – naturalmente non dato all'origine isolatamente, ma scopribile attraverso l'analisi, facendo attenzione all'oggetto della percezione sensoriale.[2] Kant tuttavia sosteneva non solo che questo elemento è dato, ma anche che è soggettivo. Lo spazio per lui, da una parte non è concettuale, ma d'altra parte non è sensibile. Per lui, esso non fa parte dei dati sensibili, ma viene aggiunto dalla intuizione soggettiva, che egli considera non solo logicamente, ma psicologicamente, anteriore agli oggetti nello spazio.[3]

Questa parte dell'argomentazione di Kant è del tutto irrilevante per noi. Per noi non è importante che una forma di esternalismo sia data al senso o all'intuizione pura, dato che trascuriamo la questione relativa al rapporto tra l'*a priori* e il soggettivo; mentre la priorità temporale dello spazio rispetto agli oggetti in esso contenuti, è stata riconosciuta generalmente del pari irrilevante per l'epistemologia, e spesso si è ritenuto che non facesse parte della tesi di Kant.[4] Se definiamo intuitivo tutto ciò che è dato alla percezione dei sensi, allora possiamo sostenere che una forma di esternalismo deve essere intuitiva; ma che essa sia intuizione pura nel senso di Kant, o meno, è irrilevante per noi, come lo è la sua priorità rispetto agli oggetti in essa contenuti.

Che la natura non sensoriale dello spazio non sia parte indispensabile dell'insegnamento *logico* di Kant, appare all'esame della sua argomentazione. Nell'introduzione, egli fornisce la distinzione puramente logica tra forma e materia, ma dà a questa distinzione, nel momento stesso in cui la suggerisce, una implicazione psicologica. Lo fa, affermando che la forma in cui è ordinata la materia delle sensazioni, non può essere essa stessa sensibile. Da questo presupposto segue naturalmente che lo spazio non può essere sensibile. Ma il presupposto è assolutamente privo di argomenti, poiché viene formulato, a quanto pare, come un assioma che si dimostra da sé; è stato

[2] Parlo di percezione dei sensi invece che di sensazione, in modo da non pregiudicare la questione della natura sensibile dello spazio.
[3] V. *Commentari* di Vaihinger, II, pp. 86-7, 168-71.
[4] V. Caird, *Filosofia critica di Kant*, vol. I, p. 287.

criticato severamente da Stumpf [5] ed altri,[6] e Vaihinger ce lo ha descritto come una inevitabile *petitio principii*; [7] non è pertinente all'argomento logico quando questo argomento viene separato, come lo abbiamo separato noi, da ogni collegamento con la soggettività psicologica; ed infine, ci lascia preda delle teorie psicologiche dello spazio, che ultimamente sono apparse tutt'altro che favorevoli alla dottrina kantiana pura.

184. Abbiamo perciò il diritto, in una ricerca epistemologica, di trascurare l'insegnamento psicologico di Kant – per lo meno per quanto distingue l'intuizione dalla sensazione spaziale – e di badare piuttosto soltanto all'aspetto logico. La parte del suo insegnamento psicologico che sostiene che lo spazio non è un mero concetto, entro certi limiti, è abbastanza evidente se applicata allo spazio reale; ma per noi, deve essere trasformata in una tesi molto più difficile, e precisamente che *nessuna* forma di esternalismo che renda possibile l'esperienza della diversità nella relazione, può essere semplicemente concettuale. Questa questione, alla quale dovremo tornare più avanti, non è più psicologica, ma appartiene interamente all'epistemologia.

185. Allora cosa ci rimane in sostanza, per i nostri fini, del primo argomento di Kant relativo all'apriorità dello spazio? Il suo argomento, nella forma in cui lo ha presentato, verte sulla proiezione eccentrica delle sensazioni. Affinché io possa riferire le sensazioni, dice, a qualcosa che sta fuori da me stesso, devo avere già in mente la forma-spazio soggettiva. Sotto questa forma, come fa notare Vaihinger (*Commentari*, II, pp. 69-165) l'argomento poggia su una *petitio principii*, perché soltanto se le sensazioni sono necessariamente non-spaziali, la loro proiezione richiede una forma-spazio soggettiva. Ma inoltre, l'apriorità logica dello spazio ha a che fare con l'esternalismo delle cose rispetto a noi?

Lo spazio *pare* che svolga due funzioni: da una parte rivela le cose, con la proiezione eccentrica delle sensazioni, come esterne all'io, mentre d'altra parte, rivela simultaneamente le cose presentate come reciprocamente esterne. Queste due funzioni, anche se spesso sono trattate come coordinate e quasi

[5] *Ursprung der Raumvorstellung*, p. 12-30.
[6] V. i riferimenti nei *Commentari* di Vaihinger, II p. 74 ss.
[7] *Commentari*, II, p. 71 ss.

equivalenti,[8] mi paiono enormemente diverse. Prima di discutere l'apriorità dello spazio, ritengo che dobbiamo distinguere attentamente fra queste sue funzioni, e decidere quale di esse dovremo esaminare.

Ora sembrerebbe che l'esternalismo al Sé debba necessariamente sollevare tutta la questione della natura e dei limiti dell'Ego, e per di più, non possa derivare dalla presentazione spaziale, a meno che non diamo al Sé una posizione definita nello spazio. Tuttavia le cose acquistano una posizione nello spazio soltanto quando possono apparire alla percezione dei sensi; perciò, se adottiamo questo punto di vista sulla funzione dello spazio, siamo obbligati a considerare l'io come un fenomeno presentato alla percezione sensibile. Ma questo riduce l'esternalismo al Sé all'esternalismo al corpo. Il corpo, tuttavia, è un oggetto presentato come qualsiasi altro, l'esternalismo degli oggetti ad esso, è perciò un caso speciale dell'esternalismo reciproco delle cose presentate. Perciò non possiamo ritenere che lo spazio fornisca, originalmente ad ogni modo, l'esternalismo all'Io, ma soltanto l'esternalismo reciproco delle cose presentate alla percezione sensibile.[9]

186. È questo, dunque, il tipo di esternalismo che ci dobbiamo aspettare dallo spazio, e la nostra domanda sarà: Sarebbe inconoscibile l'esistenza di cose diverse ma correlate, se nella percezione sensibile non ci fosse qualche forma di esternalismo? Questo è il punto cruciale sul quale è imperniata l'apriorità della nostra forma, e quindi degli assiomi necessari della geometria.

187. L'argomento inverso al mio, l'argomento che parte dall'elemento spazio-temporale nella percezione per giungere ad un mondo di cose correlate ma diverse, viene sviluppato a fondo dalla *Logica* di Bradley. È esposto brevemente nella seguente frase (p. 44, nota): « Se lo spazio e il tempo sono continui, e se tutto ciò che appare deve avere qualche posto nel tempo e nello spazio – e non è difficile sostenere entrambe queste *tesi* – possiamo giungere direttamente alla conclusione, non esiste un mero particolare. Ogni fenomeno esisterà in più di uno spazio e di un tempo; e a fronte di tale diversi-

[8] Cioè da Caird, *op. cit.*, vol. I, p. 286.
[9] Non desidero comunque negare che lo spazio è essenziale nella distinzione che segue tra io e non io.

tà, sarà esso stesso un universale ».[10] L'importanza di questo fatto emerge quando consideriamo che se esistesse un qualsiasi *mero* particolare, ogni giudizio e deduzione circa quel particolare sarebbe impossibile, dato che ogni giudizio e deduzione opera necessariamente a mezzo di universali. Ma tutta la realtà viene interpretata in base al *Questo* che si presenta direttamente, dal quale scaturiscono necessariamente il giudizio e la deduzione. A causa tuttavia della continuità e relatività dello spazio e del tempo, nessun *Questo* può considerarsi né semplice né autonomo. Da una parte, ciascun *Questo* può venire analizzato in *Questi*, e d'altra parte, si riscontra che è necessariamente correlato ad altre cose, fuori dai limiti dell'oggetto dato alla percezione sensibile. Questa funzione dello spazio e del tempo è presupposta nell'affermazione che segue, tratta dalla *Logica* di Bosanquet (vol. I, pp. 77-78): « La realtà per me è data *dalla* percezione sensibile diretta, e *dalla* sensazione diretta che l'accompagna della mia esistenza percettiva. Il mondo reale, come sistema organizzato ben determinato, *per me*, è un'estensione di questa sensazione diretta e dell'auto percezione a mezzo del giudizio, ed è l'essenza del giudizio a dar luogo e a sostenere una estensione del genere... Il soggetto di ogni giudizio della percezione è un qualche punto dato, o punto di contatto sensibile con l'io che percepisce. Ma dato che tutta la realtà è continua, il soggetto non è *semplicemente* questo punto dato o punto di contatto ».

188. Questa teoria di Bradley e Bosanquet è l'inverso della dottrina epistemologica che intendo sostenere. A causa della continuità e relatività dello spazio e del tempo, essi dicono, siamo in grado di costruire un mondo sistematico, a mezzo del giudizio e della deduzione, partendo dall'esistenza frammentaria e tuttavia necessariamente complessa che è data alla percezione sensibile. Io invece sostengo che, dato che tutta la conoscenza viene necessariamente tratta da un'estensione del *Questo* della percezione sensibile, e dato che tale estensione è possibile soltanto se il *Questo* ha il carattere frammentario eppure complesso conferito da una forma di esternalismo, allora una qualche forma di esternalismo data con il *Questo* è indispensabile a ogni conoscenza, ed è così logicamente *a priori*. L'argomento di Bradley, se è fondato, dimostra già questa affermazione; perché mentre da una parte non adotta nessuna

[10] V. anche libro I, cap. II, *passim*; specialmente p. 51 ss. e pp. 70-1.

proprietà dello spazio e del tempo se non quelle che appartengono a tutte le forme di esternalismo, d'altra parte egli dimostra che il giudizio e la deduzione richiedono che il *Questo* non sia né solo né autonomo. Ma dato che il punto è di importanza fondamentale, io cercherò di ripetere la dimostrazione in una forma più adatta di quella di Bradley, alla questione epistemologica.

189. L'essenza della mia affermazione è che se l'esperienza deve essere possibile, ogni *Questo* sensibile, quando si esamini, deve riscontrarsi da una parte risolvibile in *Questi* e d'altra parte deve dipendere per alcuni dei suoi attributi, da un riferimento esterno. La seconda di queste tesi segue dalla prima, perché se prendiamo uno dei *Questi* contenuti nel primo *Questo*, otteniamo un nuovo *Questo* necessariamente correlato agli altri *Questi* che formavano il *Questo* originale. Perciò, posso limitarmi alla prima proposizione, che afferma che l'oggetto della percezione deve contenere una diversità non solo di contenuto concettuale, ma di esistenza, e che questa può venire conosciuta soltanto se la percezione sensibile contiene, quale elemento, una qualche forma di esternalismo.

La mia premessa in questa discussione, è che ogni conoscenza comporta un accertamento della diversità nella relazione o, se lo preferiamo, dell'identità nella differenza. Questa premessa la accetto dalla logica, come risulta dall'analisi del giudizio e della deduzione. Per dimostrare una tale premessa, sarebbe necessario un trattato di logica; perciò devo rimandare il lettore alle opere di Bradley e di Bosanquet sull'argomento. Dalla mia premessa segue immediatamente che la conoscenza sarebbe impossibile, se l'oggetto dell'attenzione non fosse complesso, cioè non un *mero particolare*. Ora, l'oggetto mentale – cioè in questo caso l'oggetto della conoscenza – potrebbe esser complesso se l'oggetto della percezione diretta fosse sempre semplice?

190. A prima vista, potremmo essere inclini a rispondere affermativamente a questa domanda. Ma ritengo che svariate difficoltà impedirebbero una risposta del genere. In primo luogo la conoscenza deve partire dalla percezione. Perciò, o non possiamo avere nessuna conoscenza tranne che della nostra percezione del momento, o altrimenti, dobbiamo essere in grado di paragonarla e confrontarla a qualche altra percezione. Ora, nel primo caso, dato che la percezione del momento, per

ipotesi, è un mero particolare, secondo la nostra premessa ne è impossibile la conoscenza. Ma nel secondo caso l'altra percezione con la quale paragoniamo la prima, deve essere occorsa in qualche altro momento, e con il tempo, abbiamo immediatamente una forma di esternalismo. E inoltre, la nostra percezione del momento non è più un mero particolare. Perché la possibilità di paragonarla ad un'altra percezione comporta un punto di identità tra le due e così le rende entrambe complesse. Inoltre, il tempo deve essere continuo, e il presente, come fa notare Bradley, non è un mero punto del tempo.[11] Così la nostra percezione del momento contiene la complessità che è comportata dalla durata incerta del presente: la sua mera particolarità e la sua semplicità vanno perdute. Si perde anche la sua autonomia, perché al di là del presente incerto stanno il passato e il futuro, ai quali inevitabilmente ci fa riferire la percezione del momento. Perciò almeno il tempo è indispensabile all'identità nella differenza che viene postulata da ogni conoscenza.

191. Ma da tutto questo, non abbiamo tratto nessun fondamento per affermare una molteplicità di cose reali, o una forma di esternalismo a più di una dimensione, che, come abbiamo visto, era necessaria per la validità di due dei nostri tre assiomi. Questo ci porta alla domanda: Ce n'è abbastanza, soltanto col tempo quale forma di esternalismo, per la possibilità della conoscenza?

Penso che dobbiamo rispondere negativamente a questa domanda. Abbiamo visto che col tempo soltanto, il nostro oggetto presentato sarà complesso, ma la sua complessità, se posso usare una frase del genere, sarà semplicemente attributiva. Senza una seconda forma di esternalismo, soltanto una cosa può essere data in un dato momento,[12] e questa sola cosa costituirà quindi tutto il nostro mondo. L'oggetto della percezione passata – dato che la nostra unica cosa non ha niente di esterno ad essa per cui potrebbe venire creata o distrutta – deve essere considerato come la stessa cosa in uno stato diverso. Perciò la complessità starà soltanto negli stati mutevoli della nostra unica cosa – sarà attributiva, non sostantiva. Inoltre, ci si pone il seguente dilemma: O quest'unica cosa saremo noi, o altrimenti non potrebbe mai aversi l'auto-coscienza. Ma la difficoltà principale di un mondo del genere consisterebbe nelle variazioni della cosa. Quale potrebbe essere la causa di questi cambiamenti, dato che non saremmo a conoscenza di nulla che sia esterno alla nostra cosa? Sarebbe come una monade leibniziana, senza nessun Dio al di fuori di essa per predisporne le variazioni. In un mondo del genere, la causalità non potrebbe applicarsi, e il cambiamento sarebbe assolutamente inspiegabile.

[11] *Logica*, p. 51 ss.

[12] Perché il *Questo* in una ipotesi del genere, ha una complessità puramente temporale, e non è risolvibile in *Questi* coesistenti.

Perciò, abbiamo bisogno anche della possibilità di una diversità di cose che esistano simultaneamente, non semplicemente di attributi successivi; e ciò abbiamo visto che non può esser dato dal tempo soltanto, ma solo da una forma di esternalismo delle parti simultanee di una stessa presentazione. In altre parole, non potremmo mai dedurre l'esistenza di cose diverse ma correlate, a meno che l'oggetto della percezione sensibile non possa avere una complessità sostantiva, e per una complessità del genere abbiamo bisogno di una forma di esternalismo diversa dal tempo. Inoltre, tale forma, come è stato dimostrato nel capitolo 3, sezione A (par. 135), può assolvere alle sue funzioni soltanto se ha più di una dimensione. Nel nostro mondo reale, questa forma è data dallo spazio; in un mondo qualsiasi, che possa esser noto ad esseri con le nostre leggi mentali, deve esser data alla percezione sensibile come abbiamo appena visto una qualche forma del genere.

Questa discussione può essere brevemente riassunta, supponendo la dottrina di Bradley che ogni conoscenza è ottenuta dalla deduzione dal *Questo* della percezione sensibile. Perché se è così, *il Questo* – affinché la deduzione che dipende dall'identità nella differenza sia comunque possibile – deve essere in sé complesso, e all'analisi, deve rivelare degli attributi che hanno riferimento al di fuori di sé. Ma come è stato dimostrato sopra, ciò può accadere soltanto a mezzo di una forma di esternalismo. Questo determina gli assiomi *a priori* della geometria, che necessariamente hanno importanza esistenziale e validità in qualsiasi mondo intelleggibile.

192. Spero che l'argomentazione di cui sopra abbia spiegato perché ho ritenuto possibile dedurre da un mero concetto come quello di una forma di esternalismo, l'apriorità logica di certi assiomi quanto allo spazio dell'esperienza. L'argomentazione kantiana – che era giusta, se il nostro ragionamento è valido, quando affermava che la diversità reale nel nostro mon-

do effettivo, potrebbe esser conosciuta soltanto con l'aiuto dello spazio — era errata solamente, per quanto riguarda il suo scopo puramente logico, quando trascurava la possibilità di altre forme di esternalismo, che, se esistessero, potrebbero svolgere lo stesso compito con pari efficienza. Quindi, in quanto lo spazio differisce dagli altri concetti di forme intuitive possibili, esso è un fatto di pura esperienza, mentre in quanto le sue proprietà sono quelle che debbono avere tutte le forme del genere, esso è necessario *a priori* per la possibilità dell'esperienza.

Non posso tuttavia sperare che non sussisterà alcuna difficoltà, per il lettore, in una deduzione come questa, da concetti astratti, delle proprietà di un *datum* reale alla percezione dei sensi. Consideriamo per esempio una proprietà come l'impenetrabilità. Supporre due cose simultaneamente nella stessa posizione in una forma di esternalismo è una contraddizione logica; ma possiamo affermare questo dello spazio e del tempo reali? L'impossibilità non è qui questione d'esperienza piuttosto che di logica? No, se l'argomentazione di cui sopra era fondata, rispondo io. Perché in quel caso deduciamo la diversità reale, cioè l'esistenza di cose diverse, soltanto dalla differenza di posizione nello spazio e nel tempo. Ne segue che supporre due cose nello stesso punto dello spazio e del tempo, è ancora una contraddizione logica; non perché abbiamo costruito i dati del senso fuori dalla logica, ma perché la logica dipende per quanto riguarda la sua applicazione, dalla natura di tali dati. Questo caso illustra ciò che mi sforzo di rendere chiaro, che la mia argomentazione non ha cercato di costruire la vivida ricchezza della percezione sensibile su delle «categorie senza sangue», ma soltanto di mettere in luce che a meno che la percezione sensibile non contenga un certo elemento, queste categorie sarebbero incapaci di afferrarla.

193. In che modo dobbiamo giustificare la fortunata realizzazione di queste esigenze – se a mezzo di un'armonia prestabilita, a mezzo dell'adattamento darwiniano al nostro ambiente, a mezzo della soggettività dell'elemento necessario alla percezione dei sensi, a mezzo di una fondamentale identità ed unità tra noi stessi e il resto della realtà – è un'altra questione, che appartiene piuttosto alla metafisica che non alla nostra attuale linea di argomentazione. Abbiamo sempre detto che l'*a priori* è ciò che è necessario per la possibilità dell'esperienza, e in questo ci siamo attenuti a un criterio puramente

logico, che dà dei risultati che soltanto la logica e l'epistemologia possono confermare o confutare. Ciò che è soggettivo nell'esperienza, al contrario, è essenzialmente questione psicologica, e deve essere determinato soltanto su basi psicologiche. Quando queste due questioni saranno state risolte separatamente, ma non prima di allora, potremo formulare delle teorie circa il rapporto tra l'*a priori* e il soggettivo; permettere che queste teorie influenzino la nostra decisione o l'una o l'altra delle due questioni precedenti, potrebbe certamente confondere l'argomento, ed impedire una chiara discriminazione tra punti di vista fondamentalmente diversi.

194. Vengo adesso alla seconda questione della quale deve trattare questo capitolo, e precisamente alla domanda: Cosa ne facciamo delle contraddizioni che si intromettevano nel terzo capitolo, ogniqualvolta giungevamo a un punto che sembrava fondamentale? Tratterò questa questione brevemente, perché ho poco da aggiungere a delle risposte che tutti conosciamo. Devo soltanto dimostrare, primo, che le contraddizioni sono inevitabili, e quindi non rappresentano un'obbiezione al mio argomento; secondo, che il primo passo per eliminarle è quello di restaurare la nozione di materia come ciò che nei dati della percezione sensibile è localizzato e correlato nello spazio.

195. Le contraddizioni dello spazio sono un tema antico – tanto antico infatti, quanto la confutazione del moto da parte di Zenone. Esse sommariamente, sono di due tipi, anche se i due tipi non possono venire separati nettamente. Vi sono le contraddizioni inerenti alla nozione del continuo, e le contraddizioni che sorgono dal fatto che lo spazio, mentre per essere conoscibile deve essere relatività pura, sembrerebbe anche, dato che viene sperimentato direttamente, che debba essere qualcosa di più che pure relazioni. Le contraddizioni della prima categoria sono state incontrate più frequentemente in questo saggio, e ritengo che siano anche le più ben definite, e le più importanti ai nostri fini attuali. Dubito tuttavia che le due classi siano realmente distinte; perché credo che si possa dimostrare che qualsiasi continuo nel quale gli elementi non sono dati, ma costruzioni intellettuali che risultano dall'analisi, abbia il medesimo carattere relativo eppure non interamente relativo che appartiene allo spazio.

Le tre contraddizioni seguenti, che io discuterò successiva-

mente, mi sembrano le più importanti per una teoria della geometria.

I. Anche se le parti dello spazio sono distinte intuitivamente, nessun concetto per differenziarle è adeguato. Da qui sorge una vana ricerca degli elementi, per cui potrebbe venire effettuata la differenziazione, e di un intero di cui le parti dello spazio saranno le componenti. Così otteniamo il punto, o l'estensione zero, come elemento spaziale, ed un regresso infinito o un circolo vizioso quando cerchiamo un intero.

II. Dato che tutte le posizioni sono relative, le posizioni possono venire definite soltanto dalle loro relazioni, cioè dalle linee rette o dai piani che vi passano; ma le linee rette e i piani, essendo tutti qualitativamente simili, possono venire definiti soltanto dalle posizioni cui sono correlati. E qui abbiamo ancora un circolo vizioso.

III. Le figure spaziali devono venire considerate come relazioni. Ma una relazione è necessariamente indivisibile, mentre le figure spaziali sono necessariamente divisibili *ad infinitum*.

196. (1) *Punti.* L'antinomia del punto – che sorge ovunque sia dato un continuo, e si debbano cercare in esso gli elementi – è fondamentale per la geometria. È stata data, forse senza intenzione, dal Veronese nel primo assioma, sotto la forma: « Vi sono punti diversi. Tutti i punti sono identici ». (*Op. cit.*, p. 226). Quando abbiamo discusso la geometria proiettiva, abbiamo visto che le linee rette e i piani devono essere considerati, da una parte come relazioni tra punti, e dall'altra come formate da punti.[13] Abbiamo visto anche, quando abbiamo trattato della misurazione, come lo spazio deve essere considerato infinitamente divisibile, eppure mera relatività. Ma ciò che è divisibile e consiste di parti, come lo spazio, deve condurre alla fine, con un'analisi approfondita, ad una parte semplice ed inanalizzabile, che è l'unità di differenziazione. Perché tutto ciò che può venire diviso ed ha parti, possiede una qualche materialità e deve perciò contenere due unità fondamentali, e precisamente l'intero e l'elemento più piccolo che possiede materialità. Ma nello spazio è notorio che non è così. Dopo aver ipostatizzato lo spazio, come è costretta a fare la geometria, la mente esige imperativamente degli elementi, ed insiste per averli, che sia possibile o meno. Di questa esigenza sono prova tutte le applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale.[14] Ma che tipo di elementi otteniamo così? L'analisi, non essendo in grado di trovare prima un punto di arresto, trova i suoi elementi nei punti, cioè nei quanta zero dello spazio. Un concetto del genere è una contraddizione palpabile, resa tollerabile soltanto per la sua necessità e familiarità. Un punto deve essere spaziale, altrimenti non assolverebbe la funzione di elemento spaziale; ma ancora, non deve contenere nessuno spazio, perché ogni estensione finita è passibile di ulteriore analisi. I punti non possono mai venir dati all'intuizione, che non si interessa dell'infinitesimale: essi sono una costruzione puramente concettuale, che sorge dalla necessità di avere dei termini tra i quali possano valere le relazioni spaziali. Se lo spazio fosse più che relatività, le relazioni spaziali dovrebbero comportare dei correlativi spaziali; ma non compare nessun correlativo finché non abbiamo analizzato i nostri dati spaziali giù giù fino al nulla. La nozione contradditoria del punto, come una cosa nello spazio senza grandezza spaziale, è l'unico risultato della nostra ricerca di correlativi spaziali. La *reductio ad absurdum* è senz'altro sufficiente di per sé, a dimostrare la relatività essenziale dello spazio.

[13] Cap. 3, sez. A (par. 131).

197. Così la geometria è costretta, dato che desidera ritenere lo spazio indipendente, a ipostatizzare le sue astrazioni, e quindi a inventare una nozione auto-contradditoria come l'elemento spaziale. Un'assurdità simile appare anche più chiaramente, nella nozione dell'intero spaziale. L'antinomia può quindi venire definita così: Lo spazio, come abbiamo visto finora, se la sua conoscenza deve essere possibile, deve consistere di mera relatività; ma se deve esserne possibile una conoscenza *indipendente*, come quella che cerca la geometria, deve anche essere qualcosa di più che mera relatività, dato che è divisibile ed ha delle parti. Tuttavia nel capitolo terzo abbiamo visto, alla sezione A, (par. 133) che la conoscenza di una forma di esternalismo deve essere logicamente indipendente dalla materia particolare che riempie la forma. Allora, come ci districheremo in questo dilemma?

Ritengo che l'unico modo sia, non di far dipendere la geometria dalla fisica, il che abbiamo visto che è errato,[15] ma di dare a ciascuna proposizione geometrica un certo riferimento

[14] Cfr. Hannequin, *Essai Critique de l'hypothese des atomes*, Paris, 1895, cap. I, sez. III, specialmente p. 43.
[15] V. cap. 3, par. 69 ss.

alla materia in generale. Ed a questo punto deve essere fatta un'importante distinzione. Finora abbiamo parlato dello spazio come relativo, e delle figure spaziali come relazioni. Ma sembrerebbe che lo spazio sia piuttosto relatività che relazioni – non essendo una relazione in sé, offre solo la possibilità di relazioni tra cose diverse.[16] Applicata a una figura spaziale, che può sorgere soltanto per una differenziazione dello spazio, e quindi per l'introduzione di qualche fattore che la differenzi, la parola relazione induce forse meno in errore di qualsiasi altra; applicata allo spazio vuoto indifferenziato, non sembra proprio una descrizione esatta.

Ma una semplice possibilità non può esistere, o esser data alla percezione dei sensi! Che ne è allora, delle argomentazioni della prima parte di questo capitolo? Rispondo che non è lo spazio vuoto, ma sono le figure spaziali, ad essere rivelate alla percezione sensibile, e le figure spaziali, come abbiamo appena visto, comportano una differenziazione dello spazio e quindi un riferimento alla materia che è nello spazio. Ed è anche con le figure spaziali, e con lo spazio vuoto, che ha a che fare la geometria. L'antinomia discussa sopra sorge allora – così sembrerebbe – dal tentativo di trattare dello spazio vuoto piuttosto che delle figure spaziali e della materia alla quale esse necessariamente si riferiscono.

198. Vediamo se, con questo cambiamento, possiamo superare l'antinomia del punto. Adesso diremo che le figure spaziali sono relazioni tra la materia che differenzia lo spazio vuoto. La loro divisibilità, che sembrava contraddire il loro carattere relativo, può venire spiegata in due modi: primo, come valida per le figure considerate parti dello spazio vuoto, che in sé non è una relazione; secondo, perché denota la possibilità del cambiamento continuo nella relazione espressa dalla figura spaziale. Questi due modi sono in fondo gli stessi; perché lo spazio vuoto è una possibilità di relazioni, e la figura, quando viene considerata in relazione allo spazio vuoto, diventa così una relazione *possibile*, con la quale si possono confrontare o paragonare altre relazioni possibili. Ma il secondo modo di considerare la divisibilità è quello migliore, dato che introduce un riferimento alla materia che differenzia lo spazio vuoto, senza il quale le figure spaziali e quindi la geometria non potrebbero esistere. È lo spazio vuoto allora – dobbiamo concludere – che dà origine all'antinomia in questione; perché lo spazio vuoto è una mera possibilità di relazioni, indifferenziato ed omogeneo, e così completamente privo di parti o di materialità. Parlare delle parti di una possibilità non ha senso; le parti e la differenziazione sorgono soltanto da un riferimento alla materia che è differenziata nello spazio.

[16] Vedi la terza antinomia più avanti, par. 201 ss.

199. Ma quale natura dobbiamo ascrivere a questa materia, che sarà comportata in tutte le proposizioni geometriche? Nella critica di Helmholtz (cap. 2, par. 73) si può ricordare che abbiamo deciso che la geometria si riferisce a un tipo di materia speciale ed astratta, che non si ritiene possieda nessuna proprietà causale, che eserciti o sia soggetta all'azione di forze. E credo che questa sia la materia che ci serve per le necessità del momento. Naturalmente, non è che affermiamo che la materia reale possa esser priva delle proprietà con cui è familiare la fisica, ma che ci astraiamo da queste proprietà perché sono irrilevanti per la geometria. Tutto ciò che vogliamo, per il nostro fine immediato, è un soggetto per la diversità che lo spazio rende possibile, o dei termini per le relazioni con cui lo spazio vuoto, se dobbiamo comunque studiare lo spazio, deve essere differenziato. Ma come deve essere considerata una materia che adempia questa funzione?

Abbiamo detto che lo spazio vuoto è la possibilità della diversità nella relazione, ma che le figure spaziali delle quali tratta necessariamente la geometria, sono le relazioni effettive, rese possibili dallo spazio vuoto. Perciò la nostra materia deve fornire i termini di queste relazioni. Deve essere differenziata, dato che una differenziazione, come abbiamo visto, è opera speciale dello spazio. E nella nostra materia dobbiamo trovare quell'unità di differenziazione, o atomo,[17] che non potevamo trovare nello spazio. Questo atomo deve essere semplice, cioè non deve contenere nessuna diversità reale; deve esser un *Questo* non risolvibile in *Questi*. Essendo semplice, non può contenere nessuna relazione con se stesso, e conseguentemente, dato che le figure spaziali sono mere relazioni, non può apparire come una figura spaziale; perché tutte le figure spaziali comportano qualche diversità nella materia. Ma il nostro atomo deve avere relazioni spaziali, con altri atomi, dato che la sua unica funzione è quella di fornire i termini per que-

[17] Questo atomo, naturalmente, non deve essere confuso con l'atomo della chimica.

ste relazioni. È anche in grado di avere queste relazioni, dato che è differenziato da altri atomi. Perciò otteniamo un termine non esteso per le relazioni spaziali, proprio del tipo che ci serve. Fintantoché cercavamo questo termine senza riferimento a qualcosa oltre lo spazio, la nozione auto-contradditoria del punto era l'unico risultato della nostra ricerca; ma adesso che facciamo riferimento alla materia differenziata dallo spazio, troviamo subito il termine che serviva, e precisamente un elemento semplice non spaziale, con relazioni spaziali rispetto ad altri elementi. Per la geometria un termine del genere apparirà come un punto, a causa delle sue relazioni spaziali; ma la contraddizione del punto, come vediamo adesso, risulta soltanto dalla indebita astrazione con cui ha a che fare la geometria.

200. (2) *Il circolo vizioso nella definizione delle linee rette e dei piani.* Non è necessario che questa difficoltà ci trattenga molto, dato che con l'atomo materiale, abbiamo aperto un varco attraverso la relatività che dava origine al circolo vizioso. Le linee rette, nel procedimento puramente geometrico, sono determinate soltanto dai punti; ed i punti soltanto dalle linee rette. Ma i punti, adesso, vengono sostituiti dagli atomi materiali: la dualità dei punti e delle linee, quindi, è scomparsa, e la linea retta può venire definita come la relazione spaziale tra due atomi senza estensione. Questi atomi hanno attributi spaziali, derivati dalle loro relazioni verso altri atomi; ma essi non hanno nessun attributo spaziale *intrinseco*, quale potrebbe appartenere loro se avessero un'estensione o una figura. Così le linee rette e i piani sono le vere unità spaziali, e i punti sono dovuti solo al tentativo di trovare entro lo spazio, i termini delle relazioni spaziali, che esistono soltanto in una materia che va oltre lo spazio. Le linee rette, i piani e i volumi sono le relazioni spaziali tra due, tre o quattro atomi senza estensione, e i punti sono soltanto una invenzione geometrica conveniente, con la quale vengono sostituiti gli eventuali atomi. La geometria non tratta delle relazioni spaziali effettivamente reali, ma dell'intero schema delle relazioni possibili.

201. (3) *Lo spazio è insieme relativo e più che relativo.* Abbiamo già accennato alla questione di quanto vada lo spazio al di là delle relazioni, ma dato che questa questione è veramente fondamentale, poiché *relazione* è una parola ambigua e pericolosa, e poiché ho usato costantemente la relatività del-

lo spazio senza cercare di definire una relazione, sarà necessario discutere a fondo questa antinomia.

202. Ora, per questa discussione è indispensabile distinguere chiaramente tra spazio vuoto e figure spaziali. Lo spazio vuoto, come forma di esternalismo non è fatto di relazioni effettive, ma della possibilità delle relazioni: se gli ascriviamo una importanza esistenziale, quale fondamento, nella realtà, di ogni diversità nella relazione, abbiamo subito lo spazio come qualcosa che non è fatto in sé di relazioni, anche se offre la possibilità di ogni relazione. In questo senso, lo spazio deve essere distinto dall'ordine spaziale. Si può dire che l'ordine spaziale presuppone lo spazio, come ciò in cui è possibile questo ordine. Così, Stumpf dice: [18] «Non esiste ordine né relazione senza un contenuto positivo assoluto che ne stia alla base, e renda possibile ordinare qualsiasi cosa in questo modo. Perché, e come, distingueremmo altrimenti un ordine dall'altro?... Per distinguere gli ordini diversi uno dall'altro, dobbiamo riconoscere ovunque un contenuto assoluto specifico, in relazione al quale ha luogo l'ordine. E così anche lo spazio non è un mero ordine, ma proprio ciò secondo cui l'ordine spaziale, il fianco a fianco (*Nebeneinande*) si distingue dal resto ». Allora, non si può risolvere l'antinomia molto semplicemente, facendo riferimento a questa ambiguità dello spazio? Bradley afferma (*Apparenza e realtà*, pp. 36-7) che da una parte, lo spazio ha delle parti, e quindi non è fatto di mere relazioni, mentre d'altra parte, quando cerchiamo di dire cosa sono queste parti, riscontriamo che dopo tutto sono mere relazioni. Ma non possiamo considerare lo spazio che ha delle parti come spazio vuoto, il contenuto assoluto alla base di Stumpf, che non è fatto di mere relazioni, mentre le parti, in quanto si rivelano per mere relazioni, sono le relazioni che costituiscono l'ordine spaziale, e non lo spazio vuoto? Se può venire sostenuto questo, non esiste più antinomia.

Tuttavia una spiegazione del genere, anche se credo che sia un primo passo verso una soluzione, temo che richiederà anch'essa quasi altrettante spiegazioni della difficoltà iniziale. Perché il rapporto tra lo spazio vuoto e l'ordine spaziale è in sé una questione irta di difficoltà, da risolvere soltanto dopo molta fatica.

[18] *Ursprung der Raumvorstellung*, p. 15.

203. Consideriamo cosa sia questo spazio vuoto. (Parlo di spazio « vuoto » senza necessariamente implicare assenza di materia, ma solo per indicare uno spazio che non sia un semplice ordine di cose materiali) Stumpf ritiene che esso sia dato al senso; Kant, negli ultimi due argomenti della sua deduzione metafisica, arguisce che è un'intuizione, non un concetto, e che deve essere conosciuto prima che diventi possibile l'ordine spaziale. Io intendo sostenere invece, che è interamente concettuale; che lo spazio è dato solo come ordine spaziale; che le relazioni spaziali, essendo date, appaiono più che mere relazioni, e così vengono ipostatizzate; che una volta ipostatizzate, tutto l'insieme di esse viene considerato come contenuto nello spazio vuoto; ma che questo spazio vuoto in sé, se significa più che la possibilità logica di relazioni spaziali, è un presupposto superfluo e auto-contraddittorio. Cominciamo con l'esaminare le argomentazioni di Kant su questo punto.

Leibniz aveva affermato che lo spazio consisteva soltanto di relazioni, mentre Newton aveva sostenuto la realtà oggettiva dello spazio assoluto. Kant adottò una via di mezzo: affermava lo spazio assoluto, ma lo considerava come puramente soggettivo. L'affermazione dello spazio assoluto è l'argomento della sua seconda discussione; perché se lo spazio consistesse soltanto di semplici relazioni tra le cose, scomparirebbe necessariamente se scomparissero le cose in esso contenute; ma la seconda discussione nega questo.[19] Ora, l'ordine spaziale ovviamente scompare davvero con la materia, ma lo spazio assoluto o lo spazio vuoto si può supporre che rimanga. È questo allora, di cui Kant sta discutendo, ed è questo che, egli afferma, è pura intuizione, presupposta necessariamente dall'ordine spaziale.[20]

204. Ma possiamo esser d'accordo nel considerare lo spazio vuoto, « l'intero infinito dato », come realmente dato? Non dobbiamo, nonostante l'argomento di Kant, considerarlo interamente concettuale? In primo luogo, esso non è richiesto dalla discussione della prima metà di questo capitolo, che richiedeva soltanto che ogni *Questo* della percezione sensibile dovesse essere risolvibile in *Questi*, comportando così soltanto un ordine tra i *Questi*, non qualcosa che fosse dato inizialmente senza riferimento alcuno ad essi. In secondo luogo, i due argo-

[19] V. *Commentari* di Vaihinger, II, pp. 189-90.
[20] V. *ibid.*, p. 224 ss. per le incongruenze di Kant su questo punto.

menti[21] di Kant, volti a dimostrare che lo spazio vuoto non è concettuale, non rispondono allo scopo. L'argomento che le parti dello spazio non sono contenute *sotto* la categoria dello spazio ma *entro* lo spazio stesso, certamente dimostra che lo spazio non è un concetto generale, di cui le figure spaziali sono gli esempi; ma non ne consegue assolutamente che lo spazio vuoto non è un concetto. Lo spazio vuoto è indifferenziato ed omogeneo; le parti dello spazio, o le figure spaziali, sorgono soltanto in riferimento a qualche materia che le differenzi, e così appartengono all'ordine spaziale piuttosto che allo spazio vuoto. Se lo spazio vuoto è la condizione presupposta dell'ordine spaziale, non possiamo aspettarci che abbia rapporto con le relazioni spaziali, come un genere con la specie. Ma lo spazio vuoto può ciononostante essere un concetto universale; può essere in rapporto con l'ordine spaziale, come lo stato con i cittadini. Essi non sono esempi dello stato, ma sono contenuti in esso; essi inoltre in un certo senso, lo presuppongono, perché un individuo può diventare un cittadino soltanto trovandosi in relazione con altri cittadini in uno stato.[22]

È difficile, inoltre, che l'unicità dello spazio sembri un argomento valido, per la sua natura intuitiva; considerarlo un argomento, in verità, implica che tutti i concetti siano astratti da una serie di esempi – un punto di vista che è stato criticato nel capitolo 2 (par. 77), e non è necessario che qui venga discusso oltre.[23] Perciò non c'è fondamento nei due argomenti di Kant, circa la natura intuitiva dello spazio vuoto, che possa venire sostenuto di fronte alla critica.

205. Un'altra base per condannare lo spazio vuoto si troverà nelle antinomie matematiche. Perché non è una soluzione, come fa notare Lotze (*Metaphysik*, Libro II, cap. I, par. 106), considerare lo spazio vuoto come puramente soggettivo: le contraddizioni della intuizione soggettiva necessaria rappresentano una difficoltà grande quanto qualsiasi altra. Ma queste antinomie sorgono soltanto in rapporto allo spazio vuoto, non in rapporto all'ordine spaziale come aggregato di relazioni. Perché è soltanto quando si considera che lo spazio possie-

[21] Il quarto e il quinto nella prima edizione, il terzo e il quarto nella seconda.
[22] Cfr. Vaihinger, *Commentari*, II, p. 218.
[23] Cfr. Vaihinger, *Commentari*, II, p. 207.

de qualche materialità, che può essere richiesto un intero o un elemento reale. Abbiamo già visto questo in relazione al punto. Quando si consideri lo spazio, per quanto possa valere, come ordine spaziale solamente, l'estensione illimitata e la divisibilità all'infinito scompaiono entrambe. Ciò che viene diviso non sono le relazioni spaziali ma la materia; e se la materia, come abbiamo visto che richiede la geometria, consiste di atomi senza estensione con relazioni spaziali, non c'è motivo di considerare la materia come infinitamente divisibile, o consistente di atomi di estensione finita.

206. Ma da dove proviene, in base a questo punto di vista, il paradosso che non possiamo considerare lo spazio altro che provvisto di più o meno materialità, e divisibile all'infinito? Ritengo che ciò si debba spiegare come una illusione psicologica dovuta inevitabilmente al fatto che le relazioni spaziali si presentano direttamente. Esse hanno così una qualità psichica speciale, come esperienze immediate, e per questa qualità possono venire distinte dalle relazioni di tempo o di ogni altro ordine in cui possano essere sistemate le cose. Per Stumpf, il cui problema è psicologico, una qualità psichica del genere, costituirebbe un contenuto assoluto alla base, e giustificherebbe pienamente la sua tesi; per noi, invece, che abbiamo un problema epistemologico, non sarebbe lo stesso, ma lascerebbe il *significato* dell'elemento spaziale nella percezione sensibile, libero da ogni implicazione di spazio assoluto o spazio vuoto.[24] Allora, non possiamo abbandonare lo spazio vuoto, ed affermare: L'ordine spaziale consiste di relazioni *percepite* e ciò che è percepito, per la psicologia, ha un'esistenza che non si può risolvere interamente in relazioni, e che inevitabilmente *appare* trattarsi di più che semplici relazioni. Ma quando esaminiamo l'informazione relativa allo spazio, che ci deriva dalla percezione sensibile, non appena lasciamo che questa informazione consista in qualcosa di più che relazioni, ci troviamo immersi nelle contraddizioni. Questo lascia in campo l'ordine spaziale da solo, e riduce lo spazio vuoto a un semplice nome per la possibilità logica delle relazioni spaziali.

207. L'apparente divisibilità delle relazioni che costituiscono l'ordine spaziale, allora, può venire spiegata in due modi, anche se in fondo essi sono equivalenti. Possiamo prendere la

[24] Cfr. James, *Psychology*, vol. II, p. 148 ss.

relazione considerata in rapporto allo spazio vuoto, nel qual caso diventa più che una relazione; ma essendo falsamente ipostatizzata, appare come una cosa complessa, necessariamente composta di elementi, i quali elementi tuttavia, non emergono da nessuna parte finché non analizziamo la pseudo-cosa fino all'intimo nulla, e non giungiamo al punto. In questo senso, la divisibilità delle relazioni spaziali è un'illusione inevitabile. O ancora, possiamo prendere la relazione in rapporto agli atomi materiali che collega. In questo caso, si possono immaginare altri atomi, localizzati differentemente a mezzo di relazioni spaziali differenti. Se essi sono localizzati sulla linea retta che unisce due degli atomi iniziali, questa linea retta appare come divisa da essi. Ma la relazione iniziale non è divisa in realtà: tutto quel che è successo è che due o più relazioni equivalenti l'hanno sostituita; come le due relazioni composte di padre e figlio possono sostituire la relazione equivalente di nonno e nipote. Questi due modi di vedere la divisibilità apparente si equivalgono: perché lo spazio vuoto, in quanto non è un'illusione, è un nome per il complesso delle relazioni spaziali possibili. Quindi, considerare una figura nello spazio vuoto come divisa significa, se significa qualcosa, considerare due o più altre relazioni possibili che la sostituiscono, il che fornisce il secondo modo di considerare la questione.

Allora, lo stesso riferimento alla materia a mezzo del quale era stata risolta l'antinomia del punto, risolve anche l'antinomia circa la natura relativa dello spazio. Lo spazio, se deve essere liberato dalle contraddizioni, deve essere considerato esclusivamente come ordine spaziale, come relazioni tra atomi materiali senza estensione. Lo spazio vuoto, che sorge per una illusione inevitabile, dall'elemento spaziale nella percezione sensibile, può considerarsi, se desideriamo mantenerlo, come il nudo principio di relatività, la pura possibilità logica delle relazioni tra cose diverse. In questo senso, lo spazio vuoto è interamente concettuale; il solo ordine spaziale è sperimentato direttamente.

208. Ma in che senso l'ordine spaziale consiste di relazioni? Finora abbiamo parlato dell'esternalismo come di una relazione, e in un certo senso, un tale modo di esprimersi è giustificato. L'esternalismo, quando è predicato di qualche cosa, è un attributo di quella cosa, ed implica un riferimento a qualche altra cosa. Allora, a questo scopo, l'esternalismo è analogo alle altre relazioni; e soltanto a questo scopo, nei nostri argo-

menti precedenti, è stato considerato come una relazione. Ma quando teniamo conto delle ulteriori qualità delle relazioni, l'esternalismo comincia ad apparire non tanto come una relazione, ma piuttosto come un aspetto necessario o un elemento di tutte le relazioni. E ciò è comportato dalla necessità, per l'esistenza delle relazioni, di qualche data forma di esternalismo.

Possiamo dire che ogni relazione comporta una diversità tra i termini correlati, ma anche una qualche unità. La mera diversità non fornisce un fondamento per quella interazione e quella interdipendenza che richiede una relazione. La mera unità lascia i termini identici, e così distrugge il riferimento dell'uno rispetto all'altro, richiesto da una relazione. Il mero esternalismo, preso in astratto, fornisce soltanto l'elemento della diversità richiesto da una relazione, ed è così più astratto di qualsiasi relazione reale. Ma la mera diversità non fornisce quell'insieme indivisibile di cui deve consistere qualsiasi relazione reale, e così, quando sia considerata in astratto, non è soggetta alle restrizioni delle relazioni ordinarie.

Ma con la mera diversità, pare che siamo ritornati allo spazio vuoto, ed abbiamo abbandonato l'ordine spaziale. La mera diversità, certo, o è completa o non esiste; i gradi di diversità o una misura quantitativa di essa, sono senza senso. Quindi, non possiamo ridurre l'ordine spaziale a mera diversità. Due cose, se occupano posizioni differenti nello spazio, sono necessariamente diverse; ma altrettanto necessariamente sono qualcosa di più; altrimenti l'ordine spaziale perde di significato.

Allora, lo spazio vuoto nel senso di cui sopra, della possibilità di relazioni spaziali, contiene soltanto un aspetto di una relazione, e precisamente l'aspetto della diversità; ma l'ordine spaziale, con il suo riferimento alla materia, diventa più concreto e contiene anche l'elemento dell'unità, che ha origine dal rapporto tra i differenti atomi materiali. Allora, l'ordine spaziale consiste di relazioni nel senso ordinario; il suo elemento puramente spaziale comunque – se si può fare una tale distinzione – cioè l'elemento che può venire astratto dalla materia e considerato come costituente lo spazio vuoto, è soltanto un aspetto di una relazione, ma un aspetto che, in concreto, deve essere legato indissolubilmente all'altro aspetto. Qui, ancora una volta, vediamo il fondamento delle contraddizioni nello spazio vuoto, ed il motivo per cui l'ordine spaziale è esente da queste contraddizioni.

CONCLUSIONE

209. Abbiamo completato adesso la nostra rassegna dei fondamenti della geometria. Sarà bene, prima di abbandonare l'argomento, esaminare e ricapitolare brevemente i risultati che abbiamo ottenuto.

Nel primo capitolo abbiamo osservato lo sviluppo di un ramo della matematica, inteso dapprima a stabilire soltanto l'indipendenza logica dell'assioma delle parallele di Euclide, e la possibilità di una geometria auto-coerente che ne facesse a meno. Abbiamo riscontrato che l'ulteriore sviluppo dell'argomento si era impigliato, per un certo tempo, nella controversia filosofica; avendo dimostrato che un assioma era superfluo, i geometri del secondo periodo speravano di giungere alle stesse conclusioni rispetto a tutti gli altri, ma non riuscirono a costruire un sistema che non avesse tre assiomi fondamentali. Essendo interessati alla geometria analitica e metrica, essi tendevano a considerare l'algebra come *a priori*, ma sostenevano che le proprietà delle grandezze spaziali che non erano deducibili dalle leggi dell'algebra, dovevano essere empiriche. In tutto questo, il loro scopo non era tanto quello di screditare Kant, quanto quello di far progredire la matematica. Ma con il terzo periodo, diminuisce l'interesse nella filosofia, l'opposizione a Euclide diventa meno marcata, e cosa più importante di tutte, la misurazione, non viene più considerata fondamentale, e lo spazio viene trattato a mezzo di metodi descrittivi piuttosto che quantitativi. Ma ciononostante, tre assiomi, sostanzialmente gli stessi di quelli mantenuti nel secondo periodo, vengono ancora mantenuti da tutti i geometri.

Nel secondo capitolo, abbiamo cercato, con una critica di alcune filosofie geometriche, di preparare il terreno per una teoria costruttiva della geometria. Abbiamo visto che Kant, nell'applicare l'argomento dell'estetica trascendentale allo spazio, era andato troppo oltre, dato che il suo scopo logico si estendeva soltanto a qualche forma di esternalismo in generale. Abbiamo visto che Reimann, Helmholtz e Erdmann, tratti in errore dal pregiudizio quantitativo, avevano trascurato il sustrato qualitativo richiesto da ogni giudizio sulla quantità, e così sbagliarono la direzione in cui debbono essere trovati gli assiomi necessari della geometria. Abbiamo anche respinto il punto di vista di Helmholtz, che la geometria dipende dalla fisica,

perché abbiamo riscontrato che la fisica deve presumere una conoscenza della geometria, prima che possa diventare possibile. Ma abbiamo ammesso, nella geometria, un riferimento alla materia – non tuttavia alla materia come è empiricamente nota alla fisica, ma a una materia più astratta, la cui sola funzione è quella di apparire nello spazio e di fornire i termini delle relazioni spaziali. Abbiamo ammesso tuttavia, oltre a questo, che tutte le misurazioni *reali* debbono venire effettuate tramite la materia *reale*, e sono possibili soltanto empiricamente, attraverso la conoscenza empirica dei corpi approssimativamente rigidi. Nella critica di Lotze, abbiamo visto che il senso più importante, in cui sono possibili degli spazi non euclidei, è un senso filosofico, e precisamente che essi non sono condannati da un qualsiasi argomento *a priori* relativo alla necessità dello spazio per l'esperienza, e che conseguentemente, se non vengono confermati, ciò accadrà soltanto su basi empiriche. Abbiamo riscontrato che le critiche di Lotze circa il procedimento matematico della geometria erano dovute interamente ad ignoranza dell'argomento.

Procedendo, nel terzo capitolo, ad una teoria costruttiva della geometria, abbiamo visto che la geometria proiettiva che non ha riferimento alla quantità, è necessariamente valida per qualsiasi forma di esternalismo. I suoi tre assiomi – l'omogeneità, le dimensioni e la linea retta – sono stati tutti dedotti dal concetto di una forma di esternalismo, e dato che una qualche forma del genere è necessaria all'esperienza, sono stati dichiarati tutti *a priori*. Nella geometria metrica, invece, abbiamo trovato un elemento empirico, che sorge dalle alternative dello spazio euclideo e non euclideo. Rimanevano ancora tre assiomi *a priori*, comuni a questi spazi, e condizioni necessarie alla possibilità della misurazione; questi erano l'assioma del libero movimento, l'assioma che lo spazio ha un numero finito intero di dimensioni, e l'assioma della distanza. Tranne per l'idea nuova del moto, si è riscontrato che sono equivalenti alla triade proiettiva, e così necessariamente validi per qualsiasi forma di esternalismo. Ma i rimanenti assiomi di Euclide – l'assioma delle tre dimensioni, l'assioma che due linee rette non possono mai racchiudere uno spazio, e l'assioma delle parallele – sono stati considerati leggi empiriche, derivate dall'indagine e dalla misurazione del nostro spazio reale, e validi soltanto, per quanto riguarda gli ultimi due, entro i limiti determinati dagli errori di osservazione.

Nel presente capitolo, abbiamo completato la nostra dimostrazione dell'apriorità degli assiomi proiettivi e metrici equivalenti, dimostrando la necessità, per l'esperienza, di una qualche forma di esternalismo, data dalla sensazione o intuizione, e non semplicemente dedotta da altri dati. Abbiamo detto che senza questa la conoscenza di cose diverse ma correlate, la pietra angolare di ogni esperienza, sarebbe impossibile. Infine, abbiamo discusso le contraddizioni che sorgono dalla relatività e dalla continuità dello spazio, ed abbiamo cercato di superarle facendo riferimento alla materia. Abbiamo trovato che questa materia deve consistere di atomi senza estensione, localizzati dalle relazioni spaziali e che nella geometria appaiono come punti. Tuttavia gli attributi non spaziali della materia, abbiamo sostenuto, sono irrilevanti per la geometria, e le sue proprietà causali possono venire lasciate da parte. L'esame delle nuove contraddizioni, comportate da questa nozione della materia, richiederebbe un altro trattato che ci condurrebbe, attraverso la cinematica, entro i domini della dinamica e della fisica. Ma tutto ciò che si può fare in un saggio sui fondamenti della geometria, è discutere le difficoltà specifiche dello spazio.

INDICE

p. 7 *Nota biobibliografica*

11 Prefazione

I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

Introduzione. Definizione del problema in relazione alla logica, alla psicologia e alla matematica.

13 1. Il problema è stato delineato per la prima volta in forma moderna da Kant, che ha messo in relazione l'*a priori* col soggettivo.
14 2. Per la psicologia, una condizione mentale è soggettiva quando la sua causa immediata non si trova nel mondo esterno.
14 3. Per l'epistemologia, una nozione è *a priori* quando senza di essa la conoscenza sarebbe impossibile.
15 4. Il soggettivo e l'*a priori* appartengono rispettivamente alla psicologia e all'epistemologia. In questo saggio tratteremo soltanto di quest'ultima.
15 5. Il mio esame dell'*a priori* sarà puramente logico: quale conoscenza è necessaria per l'esperienza?
16 6. Ma dato che il necessario è ipotetico, dobbiamo includere nell'*a priori* il fondamento della necessità.
17 7. Questo sarà il postulato essenziale della nostra scienza, o l'elemento che è necessario per l'esperienza in questa materia;
17 8. entrambi rappresentano comunque, alla base, lo stesso fondamento.
17 9. Piano dell'opera.

1. Breve storia della metageometria

19 10. La metageometria ebbe inizio col rifiuto dell'assioma delle parallele.
19 11. La sua storia si può dividere in tre periodi: quello sintetico, quello metrico e quello proiettivo.
22 12. Il primo periodo venne iniziato da Gauss,
22 13. i cui suggerimenti vennero sviluppati indipendentemente da Lobacevskij

p. 23 14. e da Bolyai.
24 15. Lo scopo di tutti e tre era di dimostrare che l'assioma delle parallele non poteva essere dedotto dagli altri, poiché il negarlo non portava a contraddizioni.
25 16. Il secondo periodo ebbe un fine più filosofico, e venne ispirato principalmente da Gauss e da Herbart.
26 17. La prima opera di questo periodo, quella di Riemann, introdusse due concetti nuovi:
26 18. il primo, quello di molteplice, è il concetto delle classi, che contiene lo spazio come una specie
27 19. e viene definito in modo tale che le sue delimitazioni formano un insieme di grandezze;
28 20. il secondo, quello della misura della curvatura del molteplice, scaturì dalla curvatura delle linee e superfici curve
30 21. a mezzo della formula analitica di Gauss per la curvatura delle superfici
32 22. che ci rende possibile definire la misura costante della curvatura di uno spazio a tre dimensioni senza fare riferimento a una quarta dimensione.
33 23. Il risultato più importante del lavoro matematico di Riemann è stato quello di dimostrare che se le grandezze sono indipendenti dal luogo, la misura della curvatura dello spazio deve essere costante.
34 24. Helmholtz, che era più un filosofo che un matematico,
35 25. fornì una formulazione nuova ma inesatta degli assiomi indispensabili
36 26. e dedusse la formula di secondo grado dell'arco infinitesimale che Riemann aveva adottato.
37 27. Beltrami diede una interpretazione euclidea alla planimetria di Lobacevskij
38 28. che è analoga alla teoria della distanza di Cayley;
38 29. e trattò gli spazi a *n*-dimensioni, di curvatura negativa costante.
39 30. Il terzo periodo abbandona i metodi metrici del secondo e sviluppa la nozione di quantità spaziale.
40 31. Cayley trasformò le proprietà metriche in proprietà proiettive relative a una data conica o quadrica, l'Assoluto
41 32. e Klein dimostrò che esistono sistemi euclidei o non euclidei secondo la natura dell'Assoluto.
42 33. Perciò lo spazio euclideo sembrava dare origine a tutti i tipi di geometria, e l'interrogativo, che è reale, parve ridursi soltanto a una convenzione;
42 34. ma questo punto di vista è dovuto alla confusione circa la natura delle coordinate impiegate.
43 35. Le coordinate della proiezione sono state considerate come dipendenti dalla distanza, e quindi in effetti metriche;
43 36. ma ciò non è esatto, perché un rapporto disarmonico può essere determinato proiettivamente.
45 37. Le coordinate di proiezione, essendo puramente descrittive, non possono fornire nessuna informazione circa le proprietà metriche e la trasformazione delle proprietà da metriche in proiettive è semplicemente tecnica.

p. 48 38. Il vero rapporto della misurazione della distanza di Cayley con la geometria non euclidea, è quello suggerito dal Saggio di Beltrami ed elaborato da Sir R. Ball,
49 39. che fornisce un equivalente euclideo per ogni proposizione non euclidea, e quindi elimina la possibilità di contraddizioni nella metageometria.
50 40. Non è stato dimostrato che la geometria ellittica di Klein abbia una corrispondente varietà di spazi.
53 41. L'uso geometrico degli immaginari, di cui Cayley richiese una discussione filosofica,
54 42. ha validità puramente tecnica
56 43. ed è in grado di offrire risultati geometrici soltanto quando comincia e finisce con punti e figure reali.
57 44. Abbiamo visto ora che la geometria proiettiva precede logicamente la geometria metrica, ma non può sostituirla.
58 45. Sophus Lie ha applicato i metodi proiettivi alla formulazione di Helmholtz degli assiomi, ed ha dimostrato che l'assioma della monodromia è superfluo.
61 46. La metageometria è cresciuta gradualmente, indipendentemente dalla filosofia, ma è diventata sempre più interessante per la filosofia.
62 47. La geometria metrica ha tre assiomi indispensabili
63 48. che non sono risultato, ma condizione della misura.
63 49. e sono quasi equivalenti ai tre assiomi della geometria proiettiva;
64 50. entrambe le serie di assiomi sono richieste non dai fatti ma dalla logica.

2. Resoconto critico di alcune teorie filosofiche precedenti della geometria

65 51. Una critica delle teorie caratteristiche moderne non è necessario che inizi prima di Kant.
66 52. In una discussione sulla geometria, la dottrina di Kant dev'essere considerata nel suo aspetto puramente logico.
66 53. Kant afferma che, dato che la geometria è apodittica, lo spazio deve essere *a priori* e soggettivo, mentre, dato che lo spazio è *a priori* e soggettivo, la geometria deve essere apodittica.
67 54. La metageometria ha rovesciato il primo criterio della discussione, non il secondo.
68 55. Si può confutare il secondo criticando sia la distinzione tra giudizio sintetico ed analitico, che i primi due argomenti della deduzione metafisica dello spazio.
68 56. La logica moderna considera ogni giudizio sia sintetico che analitico.
70 57. ma lascia l'*a priori* come ciò che è presupposto nella possibilità dell'esperienza.
71 58. I primi due argomenti di Kant circa lo spazio bastano a dimostrare qualche forma di esternalismo, ma non necessariamente lo spazio euclideo, una condizione necessaria dell'esperienza.

p. 73 59. Tra i successori di Kant, soltanto Herbart ha anticipato la teoria della geometria, influenzando Riemann.
74 60. Riemann considerò lo spazio come un tipo particolare di molteplice, cioè del tutto quantitativamente,
75 61. e trascurò perciò le proprietà qualitative dello spazio.
76 62. La sua filosofia poggia su una imperfetta separazione,
76 63. la sua definizione del molteplice è oscura,
78 64. e la sua definizione della misura vale solo per lo spazio.
79 65. Anche se matematicamente apprezzabilissimo, il suo punto di vista sulla molteplicità dello spazio è filosoficamente erroneo.
81 66. Helmholtz attaccò Kant sia sul piano matematico che su quello psicologico,
81 67. ma il suo criterio della apriorità è variabile e spesso non valido.
83 68. La sua dimostrazione che gli spazi non euclidei sono immaginabili è inconcludente,
85 69. e la sua affermazione circa la dipendenza della misura dai corpi rigidi, che può essere effettuata nei tre sensi,
86 70. è interamente falsa se intende dire che l'assioma della congruenza asserisce l'esistenza dei corpi rigidi,
87 71. non risponde parimenti a verità se intende dire che il riferimento necessario delle proposizioni geometriche alla materia rende empirica la geometria pura,
89 72. e non è all'altezza delle sue conclusioni se intende dire, come intende, che la misurazione *reale* implica approssimativamente i corpi rigidi.
91 73. La geometria tratta di un argomento astratto, le cui proprietà fisiche non vengono prese in considerazione; e la fisica deve presupporre la geometria.
92 74. Erdmann accettò le conclusioni di Riemann e di Helmoltz,
93 75. e considerò gli assiomi come passi che si susseguono necessariamente nella classificazione dello spazio come una specie del molteplice.
93 76. La sua deduzione comporta quattro supposizioni erronee, e precisamente:
93 77. che i concetti debbano venire astratti da una serie di circostanze;
94 78. che ogni definizione è classificazione;
94 79. che il concetto di grandezza può applicarsi allo spazio nel suo insieme;
96 80. che se il concetto di grandezza può applicarsi in tal senso, tutti gli attributi dello spazio risulterebbero da questa applicazione.
97 81. Erdmann ritiene che la geometria da sola non è in grado di dire la parola decisiva circa la verità dell'assioma della congruenza,
98 82. che, egli afferma, viene empiricamente dimostrato dalla meccanica.
99 83. La varietà e l'inadeguatezza delle prove di Erdmann circa l'apriorità
101 84. invalidano le sue conclusioni sulla teoria della geometria.

p. 103 85. Lotze ha discusso due aspetti della teoria della geometria:
103 86. ritiene che l'eventualità degli spazi non euclidei sia suggerita dalla soggettività dello spazio;
106 87. e la respinge a causa di un malinteso matematico
107 88. non avendo afferrato il senso più importante della loro eventualità,
108 89. cioè che rispondono alle condizioni logiche cui deve adeguarsi qualsiasi forma di esternalismo.
109 90. Attacca inoltre il procedimento matematico della metageometria;
109 91. l'attacco inizia con una definizione delle parallele che dà per certa.
110 92. Lotze sostiene che tutti gli spostamenti apparenti da Euclide potrebbero essere spiegati fisicamente, un punto di vista che rende Euclide davvero empirico.
111 93. La sua critica delle analogie di Helmholtz poggia interamente su errori matematici;
115 94. la sua dimostrazione che lo spazio deve avere tre dimensioni è basata sul fatto che trascura i diversi ordini di infinito.
118 95. Egli confuta gli spazi non euclidei sulla base errata che non sono omogenei.
119 96. Le obbiezioni di Lotze rientrano in quattro categorie.
119 97. Si possono addurre altre due obbiezioni semi-filosofiche,
120 98. una delle quali, l'assenza della similitudine, ha costituito la base delle confutazioni di Delboeuf,
121 99. ma non rappresenta un fondamento valido di obbiezione.
122 100. La speculazione francese recente sui fondamenti della geometria ha suggerito pochi punti di vista nuovi.
125 101. Tutti gli spazi omogenei sono possibili *a priori*, e la scelta tra di essi è empirica.

3. [Gli assiomi]

Sezione A. Gli assiomi della geometria proiettiva.

127 102. La geometria proiettiva non tratta delle grandezze, e si applica egualmente a tutti gli spazi.
127 103. Si riscontrerà che è interamente *a priori*.
128 104. I suoi assioni non sono stati ancora formulati filosoficamente.
128 105. Le coordinate, nella geometria proiettiva, non sono grandezze dello spazio, ma nomi che indicano opportunamente dei punti.
129 106. La possibilità di distinguere vari punti è un assioma.
129 107. Le relazioni qualitative tra i punti, di cui tratta la geometria proiettiva, vengono presupposte dalla trattazione quantitativa.
130 108. L'unica relazione qualitativa tra due punti è la linea retta, e tutte le rette sono qualitativamente simili.
131 109. Da ciò consegue per estensione il principio della trasformazione proiettiva,
132 110. con la quale si ottengono figure qualitativamente indistinguibili da una figura data.

p. 132 111. Il rapporto disarmonico può e deve essere definito descrittivamente.
133 112. La costruzione quadrilatera è essenziale per la definizione proiettiva dei punti
134 113. e può essere definita proiettivamente
136 114. secondo il principio generale della trasformazione proiettiva.
137 115. Il principio della dualità è la forma matematica di un cerchio filosofico,
137 116. che è conseguenza inevitabile della relatività dello spazio, e rende contraddittoria qualsiasi definizione del punto.
137 117. Noi definiamo il punto come ciò che è spaziale ma non contiene spazio, da cui seguono le altre definizioni.
139 118. Che cosa si intende in geometria per equivalenza qualitativa?
139 119. Due paia di punti su una linea retta, o due paia di linee rette che passano per un punto, sono qualitativamente equivalenti.
140 120. Ciò spiega perché sono necessari *quattro* punti sulla medesima retta per fornire una relazione intrinseca secondo la quale può venire determinato descrittivamente il quarto quando siano dati i primi tre.
141 121. Due figure qualsiasi in relazione proiettiva sono qualitativamente equivalenti, cioè non differiscono in alcuna proprietà concettuale non quantitativa.
141 122. Nella geometria proiettiva vengono usati tre assiomi
142 123. che sono necessari per la comparazione qualitativa dello spazio:
143 124. ne comportano l'omogeneità, la relatività e la passività.
144 125. Il concetto di una forma di esternalismo,
144 126. essendo creazione dell'intelletto, può venir trattato dalla matematica pura;
145 127. la dottrina dell'estensione che ne risulta rimarrà, per il momento, ipotetica.
146 128. Diventa però assertiva per la necessità che ha l'esperienza di una qualche forma di esternalismo.
146 129. Qualsiasi forma del genere deve essere relativa
147 130. ed omogenea,
147 131. e le relazioni che la costituiscono devono apparire divisibili all'infinito;
149 132. deve avere un numero di dimensioni intero finito
150 133. a causa della sua passività ed omogeneità
150 134. e della unicità sistematica del mondo.
151 135. Una forma ad una sola dimensione non sarebbe sufficiente per l'esperienza
152 136. dato che i suoi elementi sarebbero irremovibilmente fissi in una serie.
153 137. Due posizioni hanno una relazione indipendente da altre posizioni

p. 153 138. dato che le posizioni sono determinate interamente da relazioni reciprocamente indipendenti;
156 139. perciò la geometria proiettiva è completamente *a priori*
157 140. anche se la geometria metrica contiene un elemento empirico.

Sezione B. Gli assiomi della geometria metrica.

157 141. La geometria metrica è distinta da quella proiettiva, ma ha il medesimo postulato fondamentale:
158 142. essa introduce l'idea nuova del moto, ed ha tre assiomi *a priori.*

1. L'assioma del libero movimento.

159 143. La misura richiede il criterio di eguaglianza dello spazio,
160 144. che viene offerto dalla sovrapposizione e comporta l'Assioma del libero movimento;
161 145. il rifiuto di questo assioma comporta l'azione dello spazio vuoto sulle cose.
162 146. C'è un'alternativa matematicamente possibile a questo assioma,
164 147. che è logicamente e filosoficamente insostenibile:
164 148. anche se il libero movimento è *a priori*, la misura effettiva è empirica.
164 149. Rimangono senza risposta alcune obbiezioni su:
165 150. (1) la comparazione tra i volumi e gli oggetti simmetrici di Kant;
167 151. (2) la misurazione del tempo, in cui è impossibile la congruenza;
168 152. (3) la percezione immediata della grandezza dello spazio,
169 153. (4) la geometria delle superfici non congruenti.
170 154. Il libero movimento comprende la monodromia di Helmholtz.
170 155. Il libero movimento comprende la relatività dello spazio,
170 156. dalla quale, reciprocamente, esso può venire dedotto:
171 157. il nostro assioma è quindi doppiamente *a priori.*

2. L'assioma delle dimensioni.

172 158. Lo spazio deve avere un numero intero finito di dimensioni,
172 159. ma la restrizione a tre è empirica.
173 160. L'assioma generale consegue dalla relatività della posizione.
174 161. La limitazione a tre dimensioni, diversamente dalla maggior parte delle nozioni empiriche, è accurata e certa.

3. L'assioma della distanza.

174 162. L'assioma della distanza corrisponde qui a quello della linea della geometria proiettiva.

p. 175 163. La possibilità della misura dello spazio comporta una grandezza univocamente determinata da due punti.
176 164. Dato che due punti debbono avere qualche relazione, e la passività dello spazio dimostra che ciò è indipendente dai riferimenti esterni.
177 165. Può esservi soltanto una relazione del genere;
177 166. essa dovrà venire misurata da una curva che unisce i due punti,
178 167. e la curva essere univocamente determinata dai due punti.
179 168. La geometria sferica contiene un'eccezione a questo assioma,
179 169. che comunque non è proprio equivalente a quello di Euclide.
180 170. L'eccezione è dovuta al fatto che due punti, nello spazio sferico, possono avere una relazione esterna non alterata dal moto,
181 171. che tuttavia, essendo una relazione di grandezza lineare, presuppone la possibilità della grandezza lineare.
181 172. La relazione tra due punti deve essere una linea che li unisce;
182 173. Viceversa, l'esistenza di una linea unica tra due punti può venire dedotta dalla natura di una forma di esternalismo,
183 174. e necessariamente conduce alla distanza, quando vi si applichi una quantità.
183 175. Perciò l'assioma della distanza è anch'esso doppiamente *a priori.*
185 176. Non si può istituire alcun sistema di coordinate metriche senza la linea retta;
186 177. non ci sono assiomi, oltre i tre citati, che siano necessari alla geometria metrica,
187 178. ma questi tre sono necessari per la misurazione diretta di qualsiasi continuo.
188 179. Rimangono due questioni filosofiche per il capitolo di chiusura.

4. Conseguenze filosofiche

189 180. Qual è la relazione tra una forma di esternalismo in generale e l'esperienza?
189 181. Questa forma è il concetto di classe, che contiene tutte le possibili intuizioni dell'esternalismo; e qualcuna di tali intuizioni è necessaria per l'esperienza.
190 182. In quale rapporto si trova questo punto di vista con quello di Kant?
191 183. È meno psicologico, perché non discute se lo spazio si presta alla percezione sensibile.
192 184. E sostiene che non solo lo spazio, ma qualsiasi forma di esternalismo che rende possibile l'esperienza, deve prestarsi alla percezione dei sensi.
192 185. L'esternalismo dovrebbe indicare non l'esternalismo all'Io, ma l'esternalismo reciproco delle cose presentate.

p. 193 186. Questo sarebbe inconoscibile senza una forma data di esternalismo?
193 187. Bradley ha dimostrato che lo spazio e il tempo precludono l'esistenza dei semplici particolari,
194 188. e che la conoscenza richiede che *Questo* non sia né semplice né autonomo.
195 189. Per dimostrare che l'esperienza richiede una forma di esternalismo, supporrò che ad ogni conoscenza necessiti il riconoscimento dell'identità nella differenza;
195 190. tale riconoscimento comporta il tempo
196 191. e qualche altra forma che dia diversità simultanea.
197 192. L'argomento di cui sopra non ha dedotto la percezione sensoriale alle categorie, ma ha dimostrato che la prima non è intellegibile alle seconde a meno che non contenga un dato elemento.
198 193. Come rendere conto del riconoscimento di questo elemento, è questione metafisica.
199 194. Cosa dobbiamo fare con le contraddizioni dello spazio?
199 195. In ciò che segue, verranno discusse tre contraddizioni:
200 196. (1) l'antinomia del punto dimostra la relatività dello spazio
201 197. e indica che la geometria deve avere qualche riferimento alla materia,
202 198. col quale mezzo la si rende riferibile all'ordine dello spazio, non allo spazio vuoto;
203 199. le proprietà causali della materia sono irrilevanti per la geometria, che deve considerarla composta di atomi senza estensione, che sostituiscono i punti;
204 200. (2) la discussione circa la definizione delle linee rette e dei piani viene superata con lo stesso riferimento alla materia;
204 201. (3) l'antinomia che lo spazio è relativo eppure più che relativo
205 202. sembra dipendere dalla confusione tra spazio vuoto e ordine dello spazio.
205 203. Kant considerava lo spazio vuoto come l'argomento della geometria,
206 204. ma le confutazioni degli Esteti su questo punto sono inconcludenti
207 205. e vengono rovesciate dalle antinomie matematiche, che dimostrano che argomento della geometria dovrebbe essere l'ordine dello spazio.
208 206. L'oggettività apparente dello spazio è una illusione psicologica dovuta al fatto che le relazioni di spazio vengono fornite direttamente.
208 207. La divisibilità apparente delle relazioni spaziali è un'illusione che deriva dallo spazio vuoto, o l'espressione della possibilità di relazioni spaziali quantitativamente differenti.
209 208. L'esternalismo non è una relazione, ma un aspetto delle relazioni. L'ordine dello spazio, a causa del suo riferimento alla materia, è una relazione reale.
210 209. Conclusione.